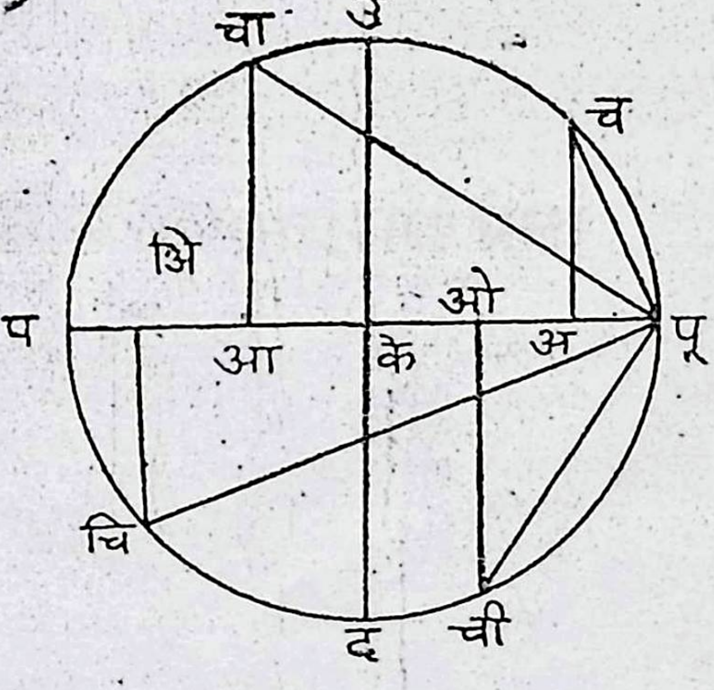
CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति)

नयराज पन्त




नेपाल राजकीय प्रज्ञा–प्रतिष्ठान

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति)

नयराज पन्त

नेपाल राजकीय प्रज्ञा–प्रतिष्ठान

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

प्रकाशक :-
नेपाल राजकीय प्रज्ञा-प्रतिष्ठान
कमलादी, काठमाडौं

प्रथम संस्करण :
वि. सं. २०४०

मुद्रक :
लुष प्रेस
ख-१/३७३, बानेश्वर
काठमाडौं-१ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# समर्पण

प्राचीन हिन्दू त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति) का सूत्रलाई
बुझाउन नेपाली भाषामा लेखिएको यो ग्रन्थ

प्राचीन हिन्दू व्यक्तगणितका सूत्रलाई
विशेष उदाहरणसहित
पहिलोपल्ट नेपाली भाषामा लेखी प्रकाशित गर्ने

**पण्डित गोपाल पाँडे**

**[ वि. सं. १९०४† – १९७७ ]**

**लाई**

**सादर समर्पण गर्दछु**

पण्डित गोपाल पाँडेको स्वर्गवास भएको
६३ वर्ष पुगी ६४ वर्ष लाग्ने श्राद्धदिवस
भीमा एकादशी
(वि. सं. २०४० फाल्गुन १ गते सोमवार)

नयराज पन्त

---

† गोपाल पाँडेको मृत्युवर्ष निश्चित छ तर जन्मवर्षमा केही संशय छ (पण्डित गोपाल पाँडे र उनको घनमूल ल्याउने रीतिको १० पृष्ठ)।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

श्री ५ महाराजाधिराज वीरेन्द्रवीरविक्रम शाहदेव

संरक्षक

नेपाल राजकीय प्रज्ञा–प्रतिष्ठान

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

स्वर्गीय श्री ५ महेन्द्रबाट २०१४ साल आषाढ ९ गतेका दिन नेपाली साहित्य, कला र संस्कृतिको संरक्षण र संवर्द्धनको निम्ति प्रज्ञा–प्रतिष्ठानको स्थापना गरिबक्सेको हो।

२०३१ साल वैशाख १ गतेका दिन *राष्ट्रनायक श्री ५ महाराजाधिराज वीरेन्द्रवीरविक्रम शाहदेव सरकार*को कृपापूर्ण संरक्षकत्व प्राप्त गरी नेपाल राजकीय प्रज्ञा–प्रतिष्ठानले नेपाली भाषा, साहित्य, कला, संस्कृति तथा ज्ञान–विज्ञानका क्षेत्रमा युगानुकूल विकास गर्ने सौभाग्य पाएको छ।

नेपालको कला र संस्कृतिको गौरवमय इतिहास अत्यन्त प्राचीन, विशाल र आफ्नै किसिमको छ। आज *राष्ट्रनायक श्री ५ महाराजाधिराज सरकार*को वात्सल्यपूर्ण नेतृत्वमा जसरी बौद्धिक, आध्यात्मिक, आर्थिक र औद्योगिक विकासको ढोका उघ्रन खोजेको छ उसरी सिर्जनात्मक उपासनामा लागेका हाम्रा प्रतिभाशाली लेखक, कवि, कलाकार र विद्वान्हरूले पनि आफ्नो देशका कला, साहित्य र संस्कृतिको गौरवमय इतिहासलाई संसारसमक्ष परिचय गराउन सक्ने खालका कृतिहरू सिर्जना गरी आफ्ना आफ्ना क्षेत्रमा महत्त्वपूर्ण योगदान गर्नेछन् भन्ने हामीलाई लागेको छ।

राष्ट्रको गौरव बढाउने र नेपालको सौरभ फिंजाउने जस्ता महत्त्वपूर्ण कार्यमा नेपाल राजकीय प्रज्ञा–प्रतिष्ठानले सबैबाट सहयोग पाउनेछ भन्ने आशा गर्दछौं।

वैशाख १ गते २०३६

लैनसिंह बाङ्देल
कुलपति
*नेपाल राजकीय प्रज्ञा–प्रतिष्ठान*

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# प्रकाशकीय

गौरीशंकर र सगरमाथामा कुनचाहिं अग्लो हो ? कति समयसम्म त गौरीशंकर नै अग्लो मानिन्थ्यो, आखिर सगरमाथा नै सर्वोच्च प्रमाणित भयो। सगरमाथाको सही उच्चाइको ज्ञान ज्यामितिविना संभव थिएन। सगरमाथाको सौन्दर्य उसको सर्वोच्चतामा छ। उच्चताको सौन्दर्यको अनुभूतिले हामीलाई जति आनन्द दिन्छ, उच्चताको सही ज्ञानले पनि त्यति नै आनन्द दिन्छ। यस्तै आनन्दमा पल्कनेहरू नै आजीवन ज्ञानको खोजी गरिरहन्छन्। ज्ञानको आनन्द ज्ञानीलाई मात्र थाहा हुन्छ– गणितको रस गणितज्ञले मात्र पान गर्न सक्छ।

प्रस्तुत पुस्तकका लेखक श्रीनयराज पन्त गणित र इतिहासका मूर्धन्य विद्वान हुनुहुन्छ। पूर्वका प्राचीन गणितज्ञ आर्यभट, वराहमिहिर, ब्रह्मगुप्त र भास्करहरूले आफ्ना ग्रन्थमा ठाउँ ठाउँमा त्रिकोणमितिअन्तर्गत पर्ने ज्या, कोटिज्या, उत्क्रमज्या, कोटघुत्क्रमज्याहरूको गणना गर्ने विधि र उपपत्ति दिएका छन्। आजभोलि चलनचल्तीमा आएका त्रिकोणमितिबाट प्राचीन आचार्यले सूत्र रूपले उल्लेख गरेका ती विषय बुझ्न सजिलो हुँदैन। त्यही सजिलो होस् भन्नाको निम्ति पन्तजीले ती प्राचीन सिद्धान्तसूत्रलाई आफ्ना तर्फबाट पनि श्लोकबद्ध सूत्र रचना गरी नेपाली भाषामा तिनको व्याख्या र उदाहरण समेत दिई विस्तारित गर्नुभएको छ। आफ्ना सदस्यबाट यस्तो उपयोगी ग्रन्थ तयार भएकोमा प्रसन्नताको अनुभव गर्दै उहाँप्रति हार्दिक धन्यवाद ज्ञापन गर्दछु।

माधवप्रसाद घिमिरे
उपकुलपति
*नेपाल राजकीय प्रज्ञा-प्रतिष्ठान*

१७ फागुन २०४०

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# प्रस्तावना

पढ्दा पढाउँदा, लेख्ता लेखाउँदा मलाई ज्यादै आनन्द हुन्छ। यसैले मैले निःशुल्क केही विद्यार्थीहरूलाई पढाउने, लेखाउने तथा लेखिएका लेखहरू उनीहरूकै नामबाट प्रकाश गराउने काम चलाएँ। तर यस्तो कामबाट लाभको सट्टा हानि नै अद्भुत भयो। यस कुरालाई मैले पूर्णिमा २७ अङ्कका १३७-१४० पृष्ठमा लेखेको छु। यसपछि म नयाँ नयाँ विद्यार्थीहरू बटुली पढाउने कामबाट हच्कँदै गएँ।

वि. सं. २०१५ तिर मङ्गलदास प्रधानाङ्ग संस्कृत महाविद्यालय (हाल वाल्मीकि विद्यापीठ) मा मसँग सिद्धान्तज्योतिष पढ्दै थिए। उनले अतिरिक्त विषय गणित लिई मसँग पढ्ने इच्छा प्रकट गरे। वृत्ति खाई पढाएको हुनाले नियत पाठ्यपुस्तक पढाउनु त मेरा लागि अनिवार्य थियो। अतिरिक्त विषय नियत पाठ्यक्रमभित्र पर्दैनथ्यो। यसैले उनलाई सो विषय पढाउन म त्यतिसारो उत्सुक भइनँ। तथापि प्रधानाचार्य पद्मप्रसादज्यूले उनी पढ्छन् भने पढाइदिनु नै बेस हो भन्ने भाव प्रकट गर्नुभएकोले म अतिरिक्त गणित पढाउन तत्पर भएँ।

वर्तमान कालमा प्रतिपादित सिद्धान्त पनि अतिरिक्त विषयमा परेका छन्। त्यस्ता विषय प्राचीन कालमा बनेका संस्कृत भाषाका ग्रन्थमा छैनन्। कतै लुकेर रहेका भए पनि तिनलाई खोतली झिक्नु सजिलो कुरा नभएकोले परीक्षार्थीले त्यस्ता पुस्तकबाट काम लिन सक्तैनन्। यस कारण अतिरिक्त गणित पढ्न भाषान्तरमा बनेका पुस्तकको सहायता लिनु अनिवार्य भयो। तदनुसार केही हिन्दी भाषाका पुस्तक खोजन लगाई पढाउन शुरू गरें। यहाँनिर एउटा ठूलो बाधा आइपर्‍यो। ती पुस्तकमा दिइएका प्रश्नका उत्तर गणितद्वारा मिलाउन सकिएन। उत्तर नमिल्नुमा मुख्यतया दुइटै मात्र कारण हुन सक्छन्— आफ्नो ढङ्ग नपुग्नु अथवा पुस्तक नै अशुद्ध हुनु। यसरी कालक्षेपण हुन लागेकोले ती हिन्दी ग्रन्थबाट पढाइरहनु लाभप्रद भएन र अर्को पुस्तक खोज्नुपर्ने स्थिति आइलाग्यो।

हल र नाइट मिली वि. सं. १९४४ मा बनाएको अंग्रेजी भाषाको बीजगणितको उत्तरार्द्ध मैले वि. सं. १९९८ मा किनेर ल्याई अभ्यास गरेको थिएँ। सो पुस्तकमा एक ठाउँमा पनि अशुद्धि देखिएको छैन। यसैले सोही पुस्तक पढ

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

भनी मैले मङ्गलदासलाई भनें, उनले मञ्जूर गरे । तर त्यतिखेर उनलाई अंग्रेजी भाषाको ज्ञान थिएन ।‡ यस कारण कसरी पढ्ने भन्ने कुरा उठ्यो । मेरो अंग्रेजी भाषामा विशेष गति छैन । आफूले बुझेका विषयका पुस्तक भए अंग्रेजी भाषाका पुस्तकबाट म कनीकुथी काम लिन सक्छु । यसैले यस बीजगणितको हामी-लाई चाहिने जति भागको अनुवाद म बोलिदिन्छु; सो अनुवाद लिपिबद्ध गरी त्यसमा परेका प्रश्नमालाका गणित गरेका कापी पनि एक प्रति साफी गरी मलाई दिन सक्छौ भने म पढाउन सक्छु भनी मैले मङ्गलदासलाई भनें । उनले यी कुरा स्वीकार गरे र पढाइ चल्दै गयो । यसरी हल र नाइटको बीजगणितको उत्तरार्द्धका ५५७ पृष्ठमध्ये ९६ पृष्ठको नेपाली भाषामा अनुवाद भयो । मङ्गलदास प्रधानाङ्ग पनि त्यस विषयको परीक्षामा उत्तीर्ण भए । उनले लेखी, साफी गरी, दिएका १६ वटा कापी मसँग छँदैछन् ।

सिद्धान्तशिरोमणि पढ्दा त्यसमा भएका प्रश्नका उत्तर राम्रोसँग ल्याई अरू पनि त्यस्ता प्रश्नका अभ्यास गरे मात्र सिद्धान्तशिरोमणि पढेको काम लाग्छ भन्ने मेरो पक्का विचार छ । यसै गरी पढ्नु, पढाउनुपर्छ भनी मैले आफूसँग पढ्ने सबै विद्यार्थीसँग कुरा गर्दै आएको छु । यस्ता कुरा म भन्थें, विद्यार्थीहरू सुन्थे यत्तिकै भइरहन्थ्यो । यसै गरी १०–१२ जना विद्यार्थी आचार्य परीक्षामा उत्तीर्ण भए । मङ्गलदासले मेरो कुरालाई कार्यरूपमा परिणत गर्ने विचार गरे । यसका लागि चापीय त्रिकोणमितिका उदाहरणहरूको अभ्यास गर्नु आवश्यक हुन आयो । अझ यसअघि त्रिकोणमितिको अभ्यास गर्नु झन् आवश्यक हुन आयो ।

आजभोलि चलनचलतीमा आएका त्रिकोणमितिबाट सिद्धान्तशिरोमणि जस्ता ग्रन्थहरूको भाव बुझ्न सजिलो हुँदैन । त्यस कारण एउटा त्रिकोणमितिको रचना गर्नु आवश्यक हुन गयो र केही भाग रचना पनि भयो । तिनताक वि. सं. २०२१ को प्रारम्भदेखि संशोधन-मण्डलले पूर्णिमा पत्रिकाको प्रकाशन शुरू गर्‍यो । पूर्णिमाको पहिलो अङ्कदेखि नै उपर्युक्त त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति) को प्रकाशन शुरू भयो ।

---

‡ म एकोहोरो पढाइमा लागिरहने हुनाले अहिले ७० वर्ष पुग्दा पनि विद्यार्थी जस्तै छु । पढेका विषय म प्रतिदिन उधिनरहन्छु । त्यसैले अरू मानिससँग सम्पर्क नबढाउने र आफन्तैसँग पनि विशेष काम नपरी सम्पर्क नगर्ने मेरो स्वभाव बस्न गएको छ । यस कारण आजभोलि मङ्गलदास प्रधानाङ्गसँग मेरो सम्पर्क नभएकोले उनले आफ्नो योग्यता कति बढाएका छन् सो कुरा मलाई थाहा छैन ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

वि. सं. २०२२ को मध्यतिर आचार्यको पढाइ संस्कृत महाविद्यालयबाट त्रिभुवन-विश्वविद्यालयमा सऱ्यो । त्यहाँ पढाउन मलाई पनि बोलाइएको थियो । इतिहास-संशोधनको विषयमा केही प्रतिष्ठित व्यक्तिबाट संशय पैदा गराइदिने काम भएको र त्यसमा त्रिभुवन-विश्वविद्यालयको पनि सहमति देखिएकोले इतिहास-संशोधनको विषयमा त्रिभुवन-विश्वविद्यालयले निश्चित नीति नलिएसम्म त्रिभुवन-विश्वविद्यालयमा गई पढाउनु मैले हितकर सम्झिनँ र म त्यहाँ गइनँ । त्यसको एक वर्षपछि वि. सं. २०२३ को आश्विन महीनामा त्रिभुवन-विश्वविद्यालयले इतिहास-संशोधनको प्रामाणिकता स्वीकार गरेकोले यसै वर्षको कार्तिक महीना-देखि मैले त्रिभुवन-विश्वविद्यालयमा पढाउन थालें ।† यसैले एक वर्ष जति मेरो र मङ्गलदासको बीचमा सम्पर्क रहेन । यस कारण पूर्णिमाका ८-११ अङ्कमा त्रिकोणमिति प्रकाशित भएन । त्यस अवधिमा मैले शङ्करमान राजवंशी, गौतमवज्र वज्राचार्य, महेशराज पन्त, दिनेशराज पन्तको सहायता लिई पण्डित गोपाल पाँडे र उनको घनमूल ल्याउने रीति रचना गरी पूर्णिमाका ८-११ अङ्कमा प्रकाशित गराएँ । वि. सं. २०२३ को कार्तिकदेखि मेरो र मङ्गलदासको फेरि सम्पर्क भयो र त्रिकोणमितिको काम चल्यो । यसपछि पूर्णिमाका १२-१४, १६ र १७ अङ्कमा त्रिकोणमिति क्रमशः प्रकाशित भयो । ऐ. शि. बाबुराम आचार्यज्यूसँग विक्रम-संवत्को प्रामाणिकताको विषयमा छलफल गर्नुपरेकोले पूर्णिमाको १५ अङ्कमा त्रिकोणमिति छापिएन ।

वि. सं. २०२४ मा मङ्गलदास प्रधानाङ्ग आचार्य परीक्षामा उत्तीर्ण भए । त्यतिखेर मैले उनलाई सिद्धान्तशिरोमणि कण्ठस्थ राखिरहने र नियत समयमा पाठ सुनाइरहने नियमको अनुसरण गर्ने भए मात्र तिम्रो र मेरो बीचमा सम्पर्क रहिरहन सक्छ भन्ने भावका कुरा गरें । त्यसपछि उनको र मेरो सम्पर्क छुट्यो, त्रिकोणमिति पनि त्यत्तिकै रह्यो ।

यस त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति) मा परेका सूत्रका व्याख्या मैले बोलेको हुँ र विषयक्रम पनि मैले नै निर्धारण गरेको हुँ । यसमा परेका नयाँ पद्य मैले बनाएको हुँ । लेख्ने, उदाहरणहरू बनाउने, साफी गर्ने र यस ग्रन्थमा परेका चित्रहरू कोर्ने काम मङ्गलदासले नै गरेका हुन् । त्यतिखेर छापिनुअघि प्रश्नमालाका उत्तरहरू जाँचिदिने काम शङ्करमान राजवंशी, गौतमवज्र वज्राचार्य, महेशराज पन्त, दिनेशराज पन्तले गरिदिए । यसरी यी सबैको सहयोगबाट पूर्णिमाका १२ अङ्कमा

---

† यस विषयमा पूर्णिमा १९ अङ्कका २३३-२४४ पृष्ठमा विस्तृत रूपमा लेखेको छु ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१५४ पृष्ठ जति त्रिकोणमिति छापियो । मङ्गलदास प्रधानाङ्गले अभिरुचि राखी काम नगरिदिएका भए यो पुस्तक लेखिदैनथियो ।

'त्रिकोणमिति' यो शब्द अंग्रेजी 'ट्रिगोनामेट्री' शब्दको अनुकरण गरी नयाँ संस्कृतरूपमा बनाइएको हो । भारतमा अंग्रेजी राज्य खडा भएपछि अंग्रेजी शिक्षा पाएका भारतीय ज्योतिषीहरूले यस शब्दलाई चलाएका हुन् । आजभोलिको त्रिकोणमितिका विषयलाई मुख्य गरेर ज्योत्पत्तिमा र त्रिप्रश्नाधिकार, प्रश्नाध्याय, यन्त्राध्याय, पाटीगणितहरूमा हाम्रा पुर्खाहरूले व्यवहार गरेका थिए । यस विषयको ज्ञान नभई ग्रहण आदिको विषयमा विचारपूर्वक काम गर्न सकिदैन । यस विषयको प्राचीन विद्यासँग वर्तमान विद्याको तुलना गर्ने मेरो प्रबल इच्छा भएकोले मैले यो काम उठाएको हुँ ।

पूर्णिमामा छापिएको त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति) नं अहिले नेपाल राजकीय प्रज्ञा-प्रतिष्ठानबाट यस ग्रन्थको रूपमा प्रकाशित भएको छ । अहिले यसलाई प्रकाशित गर्दा रुक्मनाथ पौडेलले अभिरुचि लिई उत्तरहरू दोहोऱ्याई संशोधन गर्ने काम गरिदिएका छन् । अलिकता सहयोग देवीप्रसाद भण्डारीबाट पनि भएको छ ।

यस ग्रन्थलाई तयार गर्दा काम गरिदिने मङ्गलदास प्रधानाङ्ग, रुक्मनाथ पौडेल, देवीप्रसाद भण्डारी, शङ्करमान राजवंशी, गौतमवज्र वज्राचार्य, महेशराज पन्त, दिनेशराज पन्त सबैलाई यथोचित धन्यवाद दिन्छु ।

आयुर्वेद, खगोल, शिल्प, गणित प्राचीन विद्याकन  
पढ्दै गै उपपत्तिसाथ तिनमा गर्दै नयाँ शोधन ।  
केही मानिसले उतातिर गरे विज्ञानको उन्नति,  
जेले ती अहिले भए भुवनमा सामर्थ्यशाली अति ।।

हामीले निजदेशका प्रतन ती विद्या सह्यार्नाकन  
जानेनौं, त्यसले क्रमैसँग गल्यो हामीहरूको मन ।  
भन्ने भावपरम्परा हृदयमा मेरो सधैं खेल्दछ  
सोही भाव अरण्यरोदनसरी यो लेख लेखाउँछ ।।

वि. सं. २०४०  
फाल्गुन १ गते सोमवार

नयराज पन्त  
नेपाल राजकीय प्रज्ञा-प्रतिष्ठान

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# विषय-सूची


| | |
|---|---|
| १. पूर्वापर व्यास, याम्योत्तर व्यास | १-३ |
| २. भगण, राशि, अंश, कला, विकला | ३-६ |
| ३. चाप, ज्या, कोटिज्या | ६-१० |
| ४. इच्छा लागेजति त्रिज्या मानी गणित गर्न सकिन्छ | ११-१२ |
| ५. उत्क्रमज्या | १२-१३ |
| ६. पूर्णज्या | १३-१५ |
| ७. कोण चापबाट नापिन्छ | १५-१६ |
| ८. ६० अंशको पूर्णज्या | १६-१७ |
| ९. ९० अंशको पूर्णज्या | १७-१८ |
| १०. इष्ट चापको आधाको ज्या | १९-२१ |
| ११. कोटिचाप | २२-२३ |
| १२. इष्ट चापको कोटिज्या इष्ट चापको कोटिको ज्या हुन्छ । | २३-२४ |
| १३. उत्क्रमज्या ल्याउने उदाहरण | २४-२६ |
| १४. कोटिज्याको संस्थान | २६-२७ |
| १५. कोटयुत्क्रमज्या | २७-२८ |
| १६. कोटिपूर्णज्या | २९-३१ |
| १७. इष्ट चापको आधाको ज्या ल्याउने अरू प्रकार | ३१-३५ |
| १८. ६० अंशको ज्या | ३५-३६ |
| १९. १५ अंशको ज्या | ३६-३९ |
| २०. ० र ९० अंशका ज्या | ४० |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

२१. १, २ र ३ सारणी (१५, १५ अंश फरक पर्दै गएका चापका ज्या र कोटिज्या) ४१–४४

२२. ४ सारणी (२४ र १५० त्रिज्या हुँदा १५, १५ अंश फरक पर्दै गएका चापका ज्या) ४४–४६

२३. भास्करको पहिलो ज्योत्पत्ति ४६–५६

२४. वृत्तान्तर्गत समबहुभुजक्षेत्रको विषय ५६–५८

२५. ज्याभन्दा पूर्णज्या ठूलो, पूर्णज्याभन्दा चाप ठूलो हुन्छ ५८–५९

२६. चाप र ज्याको अभेद हुने अवस्था ५९–६३

२७. व्यास र परिधिको सम्बन्ध ६३–८०

२८. ३४३८ त्रिज्या मान्नाको कारण ८०–८१

२९. १०००००००००० त्रिज्या हुँदा ज्याको गणना ८१–८५

३०. ६ सारणी (१०००००००००० त्रिज्या हुँदा २२५, २२५ कला फरक पर्दै गएका चापका ज्या) ८६

३१. ७ सारणी (३४३८ त्रिज्या हुँदा २२५, २२५ कला फरक पर्दै गएका चापका सूक्ष्म ज्या) ८७

३२. ८ सारणी (३४३८ त्रिज्या हुँदा २२५, २२५ कला फरक पर्दै गएका चापका पूर्णाङ्क ज्या) ८८

३३. ज्या बुझाउने पद्य ८९–९०

३४. २४ वटा ज्या मान्नाको कारण ९०–९२

३५. चापको अनुपातबाट ज्या आउन सक्तैन ९२–९४

३६. चापबाट ज्या ल्याउने रीति ९४–९८

३७. ज्याबाट चाप ल्याउने रीति ९८–९९

३८. विभिन्न त्रिज्यामा ज्या ल्याउने रीति १००–१०३

३९. चापबाट कोटिज्या ल्याउने रीति १०४–१०६

४०. कोटिज्याबाट चाप ल्याउने रीति १०६–१०७

४१. ९० अंशभन्दा ठूला चापका ज्या र कोटिज्या १०७–११८

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

४२. ९ सारणी (२२५, २२५ कला फरक पर्दै गएका चापका उत्क्रमज्या) ११९
४३. उत्क्रमज्या बुझाउने पद्य १२०
४४. पहिलो पदमा रहेको इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने रीति १२१–१२२
४५. उत्क्रमज्याबाट चाप ल्याउने रीति १२२–१२३
४६. पहिलो पदमा रहेको इष्ट चापको कोटच्युत्क्रमज्या ल्याउने रीति १२३–१२५
४७. कोटच्युत्क्रमज्याबाट चाप ल्याउने रीति १२५–१२६
४८. उत्क्रमज्याको विषयमा विशेष विचार १२६–१३०
४९. लघुज्याहरूका गणना १३१–१३७
५०. ब्रह्मगुप्तका लघुज्या १३७–१४०
५१. गणेश दैवज्ञका लघुज्या १४०–१४४
५२. कोटिज्या र ज्याका धनत्व र ऋणत्वको विषयमा विचार १४४–१५०
५३. ज्या कोटिज्याका चिह्न (पद) थाहा पाई चाप ल्याउने रीति १५०–१५२
५४. ९० अंशभन्दा ठूलो चाप भएमा उत्क्रमज्या ल्याउने रीति १५२–१५८
५५. ९० अंशभन्दा ठूलो चाप भएमा कोटच्युत्क्रमज्या ल्याउने रीति १५८–१६१
५६. उत्क्रमज्या तथा कोटच्युत्क्रमज्याबाट इष्ट चाप ल्याउने रीति १६१–१६७
५७. पूर्णज्याको सारणी बनाउने रीति १६७–१७०
५८. १२ सारणी (२२५, २२५ कला फरक पर्दै गएका १८० अंशसम्मका उत्क्रमज्या) १७१–१७२
५९. परिशिष्ट (यस ग्रन्थमा परेका रेखागणितका प्रतिज्ञा) १७३–१७७

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# शुद्धि–पत्र

| पृष्ठ | पङ्क्ति | अशुद्ध | शुद्ध |
|---|---|---|---|
| ५ | १८ | बन ऊ | बनाऊ |
| ९ | ३ | तच् चापस्य | तच्चापस्य |
| १० | ९ | उदाहरणः | उदाहरण |
| १२ | १ | ३४२८ त्रिज्या | ३४३८ त्रिज्या |
| १४ | ९ | पूर्णंज्याको | पूर्णज्याको |
| १४ | १९ | ज्या कति होला ? | पूर्णज्या कति होला ? |
| १६ | १६ | रेखागणित १ अ. ६ प्र. | रेखागणित १ अ. ५ प्र. |
| ३२ | १८ | $\sqrt{\text{त्रि}^2 (-३०^\circ \text{ को ज्या})^2}$ | $\sqrt{\text{त्रि}^2-(३०^\circ \text{ को ज्या})^2}$ |
| ३३ | १३ | (४) ९३१·७४८ , | (४) ९३१·७४९, |
| ५७ | १६ | रेखागणित ३ अ. २८ प्र. | रेखागणित ३अ. २५प्र., ३अ. २८प्र. |
| ८० | १८ | मायो | आयो |
| ८७ | ११ | १५२०·५८८५१६८२५०८८ | १५२०·५८८५१६९७२९२१ |
| ८७ | २३ | २२५६ | ३२५६ |
| १०३ | २२ | ७१‡ | ७१ |
| १११ | ८ | चापकोकोटिज्या | चापको कोटिज्या |
| १२५ | २० | मबमन्दा | सबमन्दा |
| १३२ | २६ | विषयल ई | विषयलाई |
| १३३ | १५ | (२) १०७·३ | (२) १०७·६ |
| १३३ | १५ | ९४ ४ | ९४·४ |
| १६८ | ११ | $\frac{१८०}{२२५}$ अं | $\frac{१८०\text{ अं}}{२२५\text{ क}}$ |

८ पृष्ठमा छापिएको चित्रसङ्ख्या ५ अलि बिग्रिएको छ ।

यो शुद्धिपत्र तथा विषयसूची रुक्मनाथ पौडेलले बनाइदिएका हुन् । देवीप्रसाद भण्डारीले दोहोऱ्याइदिएका छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति)

## पहिलो अध्याय

पटो यथा तन्तुभिरूर्ध्वतिर्यग्-
रूपैर् निबद्धोऽत्र तथैव गोलः ।
दोःकोटिजीवाभिरमुं प्रवक्तुं
ज्योत्पत्तिमेव प्रथमं प्रवक्षे ।।१।।

(सिद्धान्तशिरोमणि छेद्यकाधिकार)

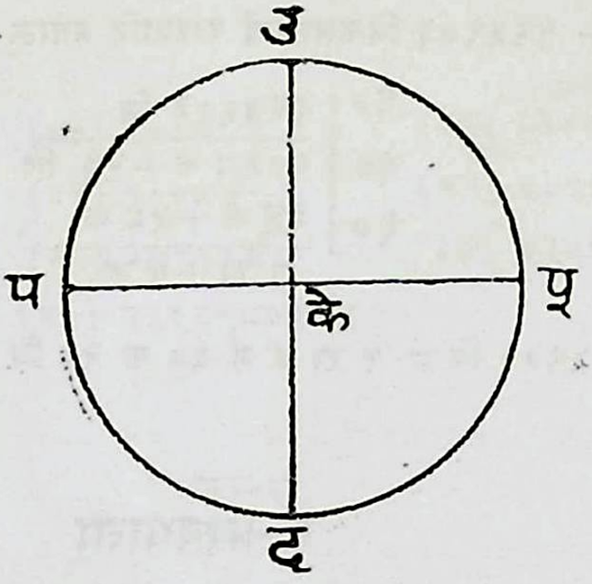
[ठाडा र तेर्सा धागा (तान र बान)ले जसरी कपडा बनेको हुन्छ, त्यसै गरी ज्या र कोटिज्याले गोल बनेको हुन्छ । गोलको कुरा बताउन ज्योत्पत्ति नै पहिले भन्छु ।]

१ प्रक्रम—

### परिभाषा

(१) इष्ट बिन्दुलाई केन्द्र मानी अभीष्ट त्रिज्या लिई वृत्त बनाउनू । सो वृत्तमा एउटा व्यास हाली सो व्यासको उपरमा लम्बरूप अर्को व्यास हाल्नू । पहिलो व्यासलाई ‘पूर्वापरव्यास’ तथा दोस्रो व्यासलाई ‘याम्योत्तरव्यास’ भन्ने चलन छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[१ चित्र]

पू उ प द वृत्तको केन्द्र के छ । पू प व्यास रेखाको उपरमा लम्बरूप भएको उ द व्यास छ । पू प व्यासलाई 'पूर्वापरव्यास' तथा उ द व्यासलाई 'याम्योत्तरव्यास' भन्ने चलन छ ।

(२) परस्पर लम्बरूप भएका दुइवटा व्यासले परिधिलाई बराबर चार टुक्रा पार्छन् । ती प्रत्येक टुक्रालाई 'पद' या 'पाद' भन्दछन् ।

ती पद अपसव्य (पूर्वबाट उत्तर, उत्तरबाट पश्चिम, पश्चिमबाट दक्षिण, दक्षिणबाट पूर्व जाने) क्रमले लिने चलन छ ।

१ चित्रमा पू देखि उ सम्म 'प्रथम पद'; उ देखि प सम्म 'द्वितीय पद'; प देखि द सम्म 'तृतीय पद'; द देखि पू सम्म 'चतुर्थ पद' मनिन्छ ।

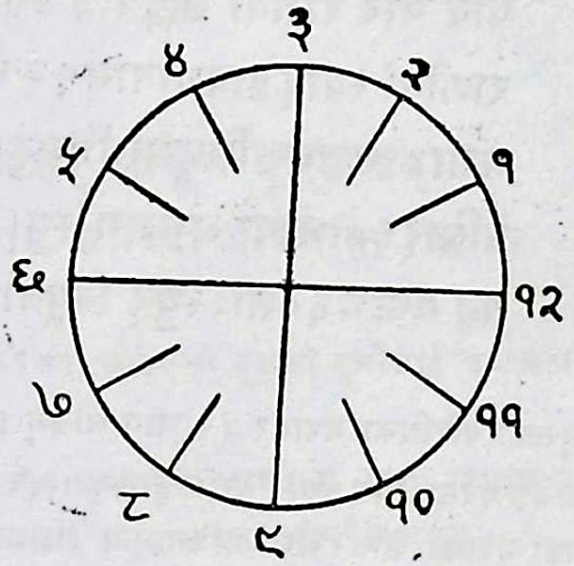
केन्द्राद् इष्टाद् इष्टया त्रिज्यया च
वृत्तं कृत्वा व्यासरेखां च कुर्यात् ।
तस्मिन् व्यासे प्राक्परा।ऽख्ये विदध्याल्
लम्बं व्यासं याम्यसौम्या।ऽख्यमन्यम् ।।२।।
इष्टा पालिर् व्यासयुग्मेन तेन
तुल्यैर् भागैर् अङ्क्यते स्वैश् चतुर्भिः ।
एते भागाः पादसंज्ञां दधाना
गण्यन्ते प्राक्चिह्नतोऽसव्यरीत्या ।।३।।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[इष्ट बिन्दुलाई केन्द्र मानी इष्ट त्रिज्याले वृत्त बनाई व्यासरेखा हाल्नू । सो व्यासलाई 'पूर्वापरव्यास' भन्छन् । पूर्वापरव्यासको उपरमा लम्बरूप भएको अर्को व्यास हाल्नू । यस व्यासलाई 'याम्योत्तरव्यास' भन्दछन् । यी दुइवटा व्यासबाट परिधिका बराबर चार टुक्रा हुन्छन् । यी टुक्रालाई 'पद' (पाद) भन्दछन् । पूर्व-बाट अपसव्यक्रमले पदको गणना हुन्छ ।]

## २ प्रक्रम–

(१) प्रत्येक पदलाई बराबर तीन भागमा बाँड्दा सो बाँडमा आएको प्रत्येक भागलाई 'राशि' भन्ने चलन छ ।




[ २ चित्र ]

यसरी वृत्तमा १२ राशि हुन्छन् । १२ राशिमा भाग लगाइएको परिधिलाई 'भगण' भन्ने चलन छ ।

(२) प्रत्येक राशिका बराबर ३० टुक्रा पार्दा हुन आएका प्रत्येक खण्डलाई 'अंश' भन्ने चलन छ ।

यसरी प्रत्येक राशिमा ३० अंश हुँदा भगणमा (वृत्तमा) १२ × ३० अंश = ३६० अंश हुन्छन् ।

(३) प्रत्येक अंशलाई बराबर ६० भाग पारी ती प्रत्येक भागलाई 'कला' भन्ने चलन छ ।

यसरी १ भगण = १२ राशि = ३६० अंश = ३६० × ६० कला = २१६००कला हुन्छन्।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(४) प्रत्येक कलालाई बराबर ६० भागमा बाँड्दा हुन आएका तो प्रत्येक खण्डलाई 'विकला' भन्ने चलन छ ।

यस कारण १ भगण = १२ राशि = ३६० अंश = २१६०० कला = २१६०० × ६० विकला = १२९६००० विकला हुन्छन् ।

इष्टं वृत्तं बाहुचन्द्र१२प्रमाणैस्
तुल्यैर् भागैर् अङ्कनीयं च नेम्याम् ।
एते भागा राशिसंज्ञां वहन्ति
पादे पादे राशयो वह्नयः३ स्युः ।।४।।
राशीनां स्याद् द्वादशानाम्१२ भचक्रम्
अंशाः खण्डा राशिजास् त्रिंशदु३०क्ताः ।
षष्टिर्६० भागा अंशजाः स्युः कलाऽख्यास्
तत् षष्टयं६०शाः स्युर् विपूर्वाः कलाऽख्याः ।।५।।

[इष्ट वृत्तको परिधिका बराबर १२ भाग लाउनू । यी प्रत्येक भाग 'राशि' कहिन्छन् । प्रत्येक पदमा तीन तीन राशि हुन्छन् । १२ राशिको 'भगण' हुन्छ । राशिका ३० वटा बराबर खण्ड 'अंश' भनिन्छन् । अंशका ६० वटा बराबर खण्ड 'कला' भनिन्छन् । कलाका ६० वटा बराबर खण्ड 'विकला' भनिन्छन् ।]

राशि, अंश, कला, विकला बुझाउनालाई तिनीहरूको माथि दायाँतिर क्रमैले रा, $^{\circ}$ , $'$ , $''$, यस्तो लेख्ने चलन छ । अथवा तिनको दायाँतिर क्रमैले रा, अं, क, वि यस्तो लेख्ने चलन पनि छ ।

जस्तै— ५ राशि १५ अंश ३० कला २२ विकलालाई बुझाउन ५ रा १५$^{\circ}$ ३०$'$ २२$''$ यसरी अथवा ५ रा १५ अं ३० क २२ वि यसरी लेख्तछन् ।

१ उदाहरण — २ रा १५ अं लाई विकला बनाऊ ।

२ रा = २ × ३० अं = ६० अं

∴ २ रा १५ अं = ६० अं + १५ अं = ७५ अं

७५ अं. = ७५ × ६० कला = ४५०० क

= ४५०० × ६० विकला = २७०००० वि

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

२ उदाहरण— १२५९०३ विकलालाई राश्यादि बनाऊ ।

| | |
|---|---|
| ६० | १२५९०३ वि |
| ६० | २०९८ क + २३ वि |
| ३० | ३४ अं + ५८ क |
| | १ रा + ४ अं |

∴ १२५९०३ वि = १ रा ४ अं ५८ क २३ वि

## १—प्रश्नमाला

अंश बनाऊ—

(१) १ रा २० अं (२) ३ रा ८ अं (३) ९ रा ६ अं (४) ७ रा १९ अं
(५) ८ रा ७ अं (६) ९रा ० अं

कला बनाऊ—

(७) १ रा २ अं (८) २ रा ३ अं ५ क (९) ६ रा ० अं ५ क
(१०) ७रा ८अं ८क (११) ९रा ५अं ६क (१२) ११रा ११अं ११क

विकला बनाऊ—

(१३) ९क (१४) ९क ९वि (१५) ९अं ९क ९वि
(१६) ११रा ५अं ३क ७वि (१७) १०रा १०अं १०क १०वि
(१८) ७रा ३अं ४५क

कलादि बन ऊ—

(१९) १२०वि (२०) २४०वि (२१) ८००वि (२२) १०००वि

अंशादि बनाऊ—

(२३) ३०१क (२४) ५१५क (२५) ३६०२वि (२६) ३८१५वि

राश्यादि बनाऊ—

(२७) ४५अं (२८) ९०अं (२९) १०८अं
(३०) २१५अं (३१) ३१०अं (३२) ३३०अं
(३३) ३००१क (३४) ५७००क (३५) ७२१५क
(३६) २००८०८वि (३७) १५८१५०वि (३८) ९९९९९९वि

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

भगणादि बनाऊ—

(३९) ३७३अं (४०) ५०८अं (४१) ६३०अं

(४२) ७२०अं (४३) १००८अं (४४) ५०१५अं

(४५) २१६००क (४६) ३०९९९क (४७) ३५८१५क

(४८) १२९६९९१वि (४९) २५९२९८०१ वि

## उत्तर

(१) ५०अं (२) ९८अं (३) २७६अं.

(४) २२९अं (५) २४७अं (६) २७० अं

(७) १९२०क (८) ३७८५क (९) १०८०५क

(१०) १३०८८क (११) १६५०६क (१२) २०४७१ क

(१३) ५४०वि (१४) ५५९वि (१५) ३२९४९वि

(१६) १२०६१८७वि (१७) १११६६१०वि (१८) ७६९५००वि

(१९) २क (२०) ४क (२१) १३क २०वि

(२२) १६क ४८वि (२३) ५अं १क (२४) ८अं ३५क

(२५) १अं ०क २वि (२६) १अं ३क ३५वि (२७) १रा १५अं

(२८) ३रा (२९) ३रा १८अं (३०) ७रा ५अं

(३१) १०रा १०अं (३२) ११रा (३३) १रा २०अं १क

(३४) ३रा ५अं (३५) ४ रा ०अं १५क (३६) १रा २५अं ४६क ४०वि

(३७) १रा १३अं ५५क ५०वि (३८) ९रा ७अं ४६क ३९वि

(३९) १भगण ०रा १३अं (४०) १भगण ४रा २८अं

(४१) १भगण ९रा (४२) २भगण

(४३) २भगण ९रा १८अं (४४) १३भगण ११रा ५अं

(४५) १भगण (४६) १भगण ५रा ६अं ३९क

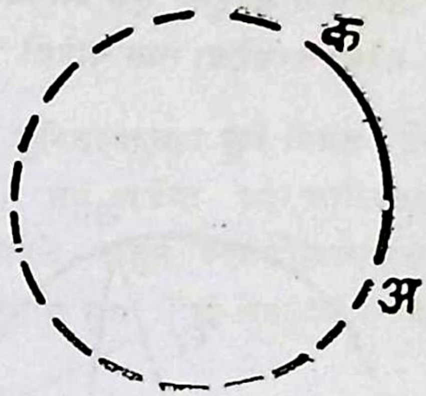
(४७) १भगण ७रा २६अं ५५क (४८) १भगण ०रा ०अं १६क ३१वि

(४९) २०भगण ०रा २अं ४३क २१वि

## ३ प्रक्रम

(१) परिधिको टुक्रालाई 'चाप' भन्दछन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu



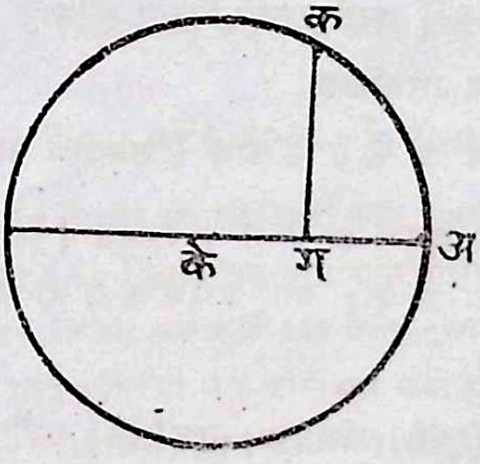

[ ३ चित्र ]

जस्तै— अ क लाई 'चाप' भन्दछन् । परिधिमा अंशादि हुने हुनाले चापमा पनि अंशादि हुन्छ ।

इष्टैर् अंशैर् अङ्कितं वृत्तखण्डम्
इष्टं चापं कोविदा आमनन्ति ।।५ ।।

[इष्ट अंशले चिनो लाइएको वृत्तको टुक्रोलाई 'इष्टचाप' भन्दछन् ।]

(२) चापको एक प्रान्तबाट व्यासरेखा हालो त्यसका उपरमा अर्को प्रान्त-बाट गरेको लम्बरेखालाई त्यस चापको 'ज्या' भन्दछन् ।

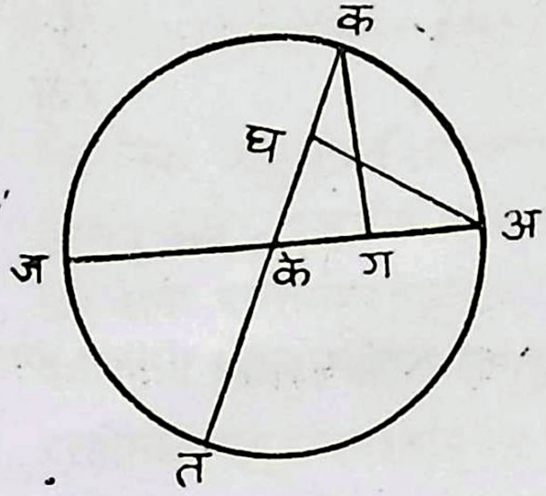



[ ४ चित्र ]

जस्तै— क ग लाई अ क चापको 'ज्या' भन्दछन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(३) चापका दुइ प्रान्तमध्ये जुनसुकै एक प्रान्तबाट व्यासरेखा गरी त्यसको उपरमा अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्बरेखा त्यस चापको 'ज्या' हुन्छ ।




[ ५ चित्र ]

जस्तै- अ क चापको 'ज्या' ल्याउन अ के ज व्यासको उपरमा क बिन्दुबाट गरेको लम्ब क ग तथा क के त व्यासमा अ बिन्दुबाट गरेको लम्ब अ घ दुवै बराबर हुन्छन् ।

किनभने के अ घ तथा के क ग त्रिभुजमा-

के अ = के क [ एउटै वृत्तका त्रिज्या भएकाले ]

क के अ कोण उभयनिष्ठ

के घ अ कोण = के ग क कोण [ समकोण भएकाले ]

∴ के घ अ त्रिभुज = के ग क त्रिभुज [रेखागणित १ अ. २६ प्र.] । यस कारण क ग = अ घ । यस कारण क ग वा अ घ रेखा अ क चापको ज्या हुन्छ ।

ज्याको अग्र (टुप्पो) परिधिमा, मूल(फेद) चाहिं व्यासमा रहन्छ ।

(४) ज्याको मूल र केन्द्रको अन्तरलाई त्यस चापको 'कोटिज्या' भन्दछन् ।

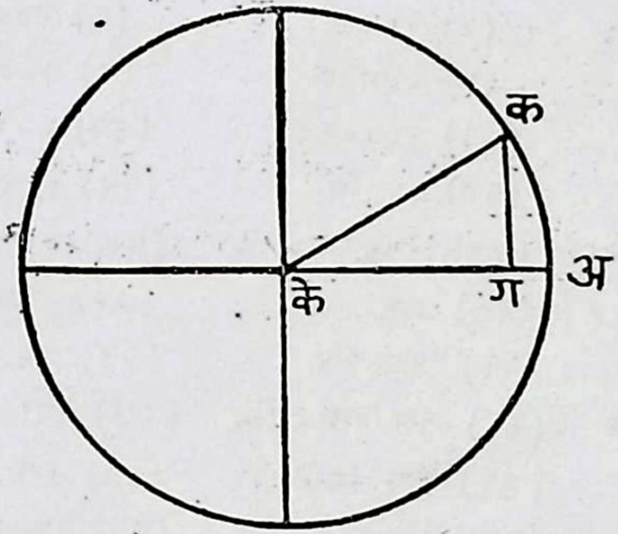
जस्तै— ५ चित्रमा के ग वा के घ लाई अ क चापको 'कोटिज्या' भन्दछन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

चापस्यैकप्रान्तगे व्याससूत्रे-
ऽन्यस्मात् प्रान्तात् पात्यमानोऽवलम्बः ।।६।।
तच् चापस्य ज्या भवेन् मूलतोऽस्याः
केन्द्रं यावत् तद्धनुःकोटिमौर्वी ।।६½।।

[चापको एक प्रान्तमा जाने व्यासरेखाको उपरमा चापको अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्बलाई त्यस चापको 'ज्या' भन्दछन् । ज्याको मूलबाट केन्द्रसम्म 'कोटिज्या' रहेको हुन्छ ।]

केन्द्रदेखि ज्याको अग्रसम्म त्रिज्या (अर्धव्यास) रहेको हुन्छ ।




[ ६ चित्र ]

६ चित्रमा क ग ज्या र के ग कोटिज्याबाट बनेको के ग क कोण समकोण हुनाले के ग क त्रिभुज जात्यत्रिभुज बनेको छ ।

यहाँ ज्या भुज, कोटिज्या कोटि, त्रिज्या कर्ण बनेको छ ।

त्रिज्या कर्णः कोटिजीवा तु कोटिर्
जीवा बाहुश् चेति जात्यं त्रिकोणम् ।।७।।
वृत्तस्याऽन्तर् जायतेऽतोऽत्र सर्वे
जात्यत्र्यस्रस्था गुणाः सम्भवन्ति ।।७½।।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[त्रिज्या कर्ण हुन्छ, ज्या भुज हुन्छ, कोटिज्या कोटि हुन्छ । यसरी वृत्तभित्र जात्यत्रिभुज बन्ने हुनाले यहाँ जात्यत्रिभुजमा हुने सबै कुरा हुन्छन् ।]

(५) त्रिज्या जति माने पनि हुन्छ ।

**इष्टा त्रिज्या सा श्रुतिर् दोर् भुजज्या**
**कोटिज्या तद्वर्गविश्लेषमूलम् ॥८॥**

(सिद्धान्तशिरोमणि छेद्यकाधिकार २ श्लोक)

[इष्ट (इच्छालागे जति) त्रिज्या मान्नू । सो कर्ण हुन्छ । ज्या भुज हुन्छ । ती दुइको वर्गान्तरको मूल कोटिज्या हुन्छ ।]

१ उदाहरणः– ५त्रिज्या, ४ज्या भए कोटिज्या कति होला ?

$$\text{कोटिज्या} = \sqrt{\text{त्रिज्या}^2 - \text{ज्या}^2} = \sqrt{५^2 - ४^2}$$
$$= \sqrt{२५ - १६} = \sqrt{९} = ३$$

२ उदाहरण– १५ ज्या, २० कोटिज्या भए त्रिज्या कति होला ?

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{\text{ज्या}^2 + \text{कोटिज्या}^2} = \sqrt{(१५)^2 + (२०)^2}$$
$$= \sqrt{२२५ + ४००} = \sqrt{६२५} = २५$$

## २–प्रश्नमाला

(१) ५ ज्या, १३ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?
(२) ९ ज्या, १५ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?
(३) ४० कोटिज्या, ५० त्रिज्या भए ज्या कति होला ?
(४) ३६ कोटिज्या, ३९ त्रिज्या भए ज्या कति होला ?
(५) ९० ज्या, १२० कोटिज्या भए त्रिज्या कति होला ?
(६) ४८ ज्या, २० कोटिज्या भए त्रिज्या कति होला ?

## उत्तर

(१) १२ (२) १२ (३) ३० (४) १५ (५) १५० (६) ५२

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ४ प्रक्रम–

गणितज्ञहरू आफ्नो सुविधाअनुसार कुनै नियत संख्यालाई त्रिज्या मानी गणित गर्दछन् । त्यसो गर्दा सबै ठाउँमा ज्या कोटिज्याहरू ट्वाक्क ट्वाक्क आउँदैनन् । त्यस कारण कहिले कहिले ज्या कोटिज्याहरूलाई करणीगतरूपमा लेख्नुपर्छ, अथवा तिनको आसन्न मूल लिई लेख्नुपर्छ । यी दुवै रीति चलेका छन् ।[१]

(१) उदाहरण– $\frac{१}{२}$ ज्या; १ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

$$\text{कोटिज्या} = \sqrt{\text{त्रिज्या}^२ - \text{ज्या}^२} = \sqrt{(१)^२ - (\tfrac{१}{२})^२}$$

$$= \sqrt{१ - \tfrac{१}{४}} = \sqrt{\tfrac{३}{४}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

(२) उदाहरण– १७१९ ज्या, ३४३८ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

$$\text{कोटिज्या} = \sqrt{\text{त्रि}^२ - \text{ज्या}^२} = \sqrt{(३४३८)^२ - (१७१९)^२}$$

$$= \sqrt{११८१९८४४ - २९५४९६१}$$

$$= \sqrt{८८६४८८३} = २९७७\cdot३९५ \text{ (आसन्न)}$$

## ३–प्रश्नमाला

(१) $\frac{\sqrt{३}}{२}$ ज्या, १ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

(२) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ ज्या १ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

(३) ६० ज्या, १२० त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

(४) २१ कोटिज्या १२० त्रिज्या भए ज्या कति होला ?

(५) ७७ ज्या १२० त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

(६) ८९० ज्या ३४३८ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

(७) ११०५ ज्या ३४३८ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ?

---

१. १ त्रिज्या भएमा ज्या कोटिज्याहरूलाई करणीगतरूपमा, अन्यत्र आसन्न-मानमा लेख्ने चलन प्रायः छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

( ८ ) १५२० ज्या ३४२८ त्रिज्या भए कोटिज्या कति होला ।
( ९ ) ६७१ कोटिज्या ३४३८ त्रिज्या भए ज्या कति होला ?
(१०) २१ ज्या ११८ कोटिज्या भए त्रिज्या कति होला ?

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) $\frac{१}{२}$ | (२) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ | (३) १०३·९२३ |
| (४) ११८·१४८ | (५) ९२·०३८ | (६) ३३२०·८०५ |
| (७) ३२५५·५८३ | (८) ३०८३·७३ | (९) ३३७१·८८४ |
| (१०) ११९·८५४ | | |

## ५ प्रक्रम—

चापको आदि बिन्दु (जहाँबाट गरेको व्यासमा ज्या–रूप लम्ब हालिन्छ) लाई 'पूर्वपदादि' भन्दछन् । पूर्वपदादि र ज्यामूलको बीचको भागलाई त्यस चापको 'उत्क्रमज्या' भन्दछन् ।

जस्तै— ६ चित्रमा अ ग लाई अ क चापको उत्क्रमज्या भन्दछन्

ज्याया मूलात् प्राक्पदाऽऽदिस्थबिन्दुं
यावत् प्रोक्ता धन्वनोऽस्योत्क्रमज्या ।।८३।।

[ज्याको मूलबाट पूर्वपदको आदि बिन्दुसम्म जुन रेखा रहन्छ, त्यसलाई त्यस चापको 'उत्क्रमज्या' भन्दछन् ।]

त्रिज्याबाट कोटिज्या घटायो भने उत्क्रमज्या आउँछ ।

जस्तै— ६ चित्रमा के अ – के ग = अ ग

कोटीमौर्व्या हीयमानां त्रिभज्यां
तच्चापोत्थाम् उत्क्रमज्यां वदन्ति ।।९।।

[कोटिज्या घटेको त्रिज्यालाई त्यस चापको उत्क्रमज्या भन्दछन् ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ४–प्रश्नमाला

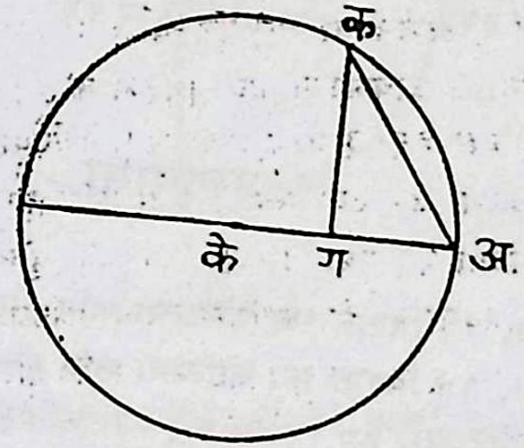
(१) १ त्रिज्या १/२ कोटिज्या भए उत्क्रमज्या कति होला ?
(२) १२० त्रिज्या ११८ कोटिज्या भए उत्क्रमज्या कति होला ?
(३) ३४३८ त्रिज्या ४४९ ज्या भए उत्क्रमज्या कति होला ?
(४) ३४३८ त्रिज्या २२६७ ज्या भए उत्क्रमज्या कति होला ?
(५) १२० त्रिज्या ७ उत्क्रमज्या भए ज्या कति होला ?

### उत्तर

(१) १/२ (२) २ (३) २९·४४६ (४)८५३·३२३ (५) ४०·३८६

## ६ प्रक्रम–

(१) चापका दुवै प्रान्तमा गई वृत्तबाहिर नजाने रेखालाई त्यस चापको 'पूर्णज्या' भन्दछन् ।




[७ चित्र]

जस्तै— अ क रेखालाई अ क चापको पूर्णज्या भन्दछन् ।

चापप्रान्तद्वन्द्वगा धन्वनोऽस्य
पूर्णज्या स्यात् संस्थिता मण्डलाऽन्तः ।।९३।।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[चापका दुइ प्रान्तमा जाने वृत्तभित्र रहने रेखा त्यस चापको 'पूर्णज्या' हुन्छ ।]

(२) ज्या र उत्क्रमज्याको वर्गयोगको मूल 'पूर्णज्या' हुन्छ ।

जस्तै— ७ चित्रको अ क ग त्रिभुजमा क ग अ कोण समकोण भएकोले

$$\sqrt{\text{क ग}^2 + \text{अ ग}^2} = \text{अ क}$$ हुन्छ ।

अर्थात् $\sqrt{\text{ज्या}^2 + \text{उत्क्रमज्या}^2}$ = पूर्णज्या

**वर्गो ज्याया व्यस्तमौर्व्युत्थकृत्या**
**युक्तः सिद्धचेत् पूर्णजीवोत्थवर्गः ॥१०॥**

[ज्याको वर्गमा उत्क्रमज्याको वर्ग जोड्यो भने पूर्णज्याको वर्ग हुन्छ ।]

## ५–प्रश्नमाला

(१) १ ज्या, १ उत्क्रमज्या भए पूर्णज्या कति होला ?
(२) २१ ज्या २ उत्क्रमज्या भए पूर्णज्या कति होला ?
(३) २२५ ज्या ७ उत्क्रमज्या भए पूर्णज्या कति होला ?
(४) ३४३१ ज्या ३२१३ उत्क्रमज्या भए, पूर्णज्या कति होला ?
(५) १२० त्रिज्या ७२ ज्या भए पूर्णज्या कति होला ?
(६) १२० त्रिज्या ९६ ज्या भए पूर्णज्या कति होला ?
(७) ३४३८ त्रिज्या २४३१ कोटिज्या भए पूर्णज्या कति होला ?
(८) १३ पूर्णज्या ५ उत्क्रमज्या भए ज्या कति होला ?
(९) $\frac{\sqrt{३}}{२}$ ज्या, $\frac{१}{२}$ कोटिज्या भए ज्या कति होला ?
(१०) १ त्रिज्या $\frac{१}{२}$ उत्क्रमज्या भए पूर्णज्या कति होला ?

## उत्तर

(१) $\sqrt{२}$ (२) २१·०९५ (३) २२५·१०९

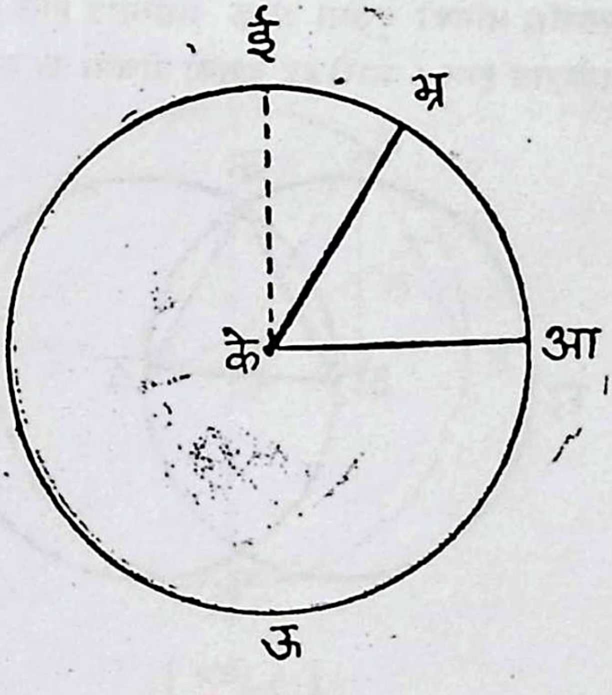
CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(४) ४७००·५४६ (५) ७५·८९५ (६) १०७·३३१
(७) २६३१·३७५ (८) १२ (९) १
(१०) १

**७ प्रक्रम–**

## कोणको मान

कोणलाई नाप्न कोणबिन्दुलाई केन्द्र मानी इष्ट त्रिज्याले वृत्त बनाउनू। कोण बनाउने दुइवटा रेखालाई त्यस वृत्तका त्रिज्या–रूप गराउनू। ती दुइ त्रिज्याको बीचमा पर्न आएको चापमा रहेको अंशादि सो कोणको मान हुन्छ।




[८ चित्र]

जस्तैः–– आ के भ्र कोणको मानलाई आ भ्र चापको अंशादिले देखाउँछ।

चापप्रान्तद्वन्द्वमाप्ते त्रिभज्ये
ये स्यातां तद्योगजः केन्द्रसंस्थः ॥
कोणो यः स्यात् तस्य कोणस्य मानं
ज्ञेयं चापस्थेन भागाऽदिकेन ॥११॥

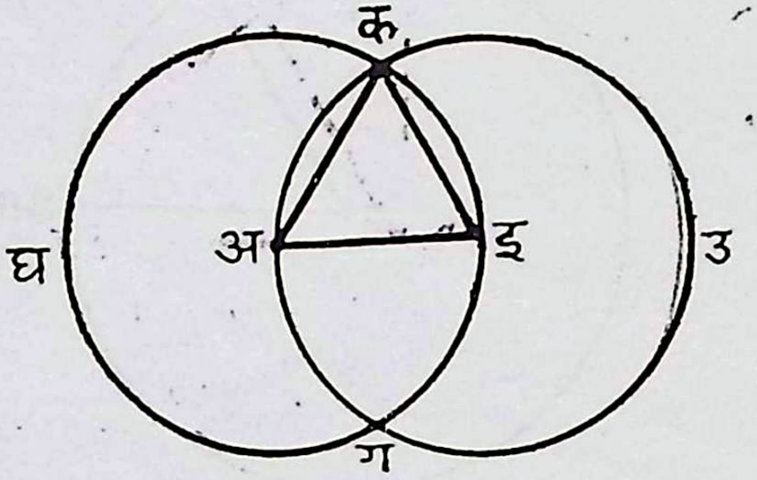
CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[चापको दुइ प्रान्तमा गएका दुइवटा त्रिज्याबाट केन्द्रमा बनेको कोणको मान सो चापमा रहेको अंशादिले जान्नुपर्छ ।]

## ८ प्रक्रम—

## ६० अंशको पूर्णज्या ल्याउने रीति ।

इ क घ ग वृत्त छ । त्यसको केन्द्र अ तथा अर्धव्यास अ इ छ । त्यस अर्धव्यासको प्रान्तको इ बिन्दुलाई केन्द्र मानी अ इ त्रिज्याले अ क उ ग वृत्त बनाऊ । सो वृत्तको परिधिले अघिको वृत्तको परिधिलाई क तथा ग बिन्दुमा काट्छ । त्यसपछि अघिको वृत्तमा अ क अर्धव्यास हाल । अ क उ ग वृत्तमा पनि इ क अर्धव्यास हाल । यसरी दुइ वृत्तको बीचमा अ क इ त्रिभुज बन्दछ ।




[ ९ चित्र ]

अ क इ त्रिभुजमा—

अ इ = अ क [इ क घ ग वृत्तका त्रिज्या भएकाले]

अ इ = इ क [अ क उ ग वृत्तका त्रिज्या भएकाले]

∴ इ क = अ इ = अ क

∴ क अ इ कोण = अ क इ कोण = अ इ क कोण

[रेखागणित १ अ. ६ प्र.]

परन्तु, क अ इ कोण + अ क इ कोण + अ इ क कोण = २ समकोण

$= १८०^०$

[रेखागणित १ अ. ३२ प्र.]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

∴ २ क अ इ कोण = $१८०^0$

यस कारण क अ इ कोण = $\frac{१८०^0}{३}$ = $६०^0$

यसबाट क अ इ कोणको सम्मुखमा रहेको इ क चाप ६० अंश रहेछ भन्ने सिद्ध हुन्छ । यस चापको पूर्णज्या इ क रेखा छ । यो इ क रेखा इ क घ ग वृत्तको त्रिज्याले बराबर छ । यस कारण ६० अंशको पूर्णज्या त्रिज्याले बराबर हुन्छ ।

[यो कुरो रेखागणितको ४ अ. १५ प्र. को अनुरूप हो]

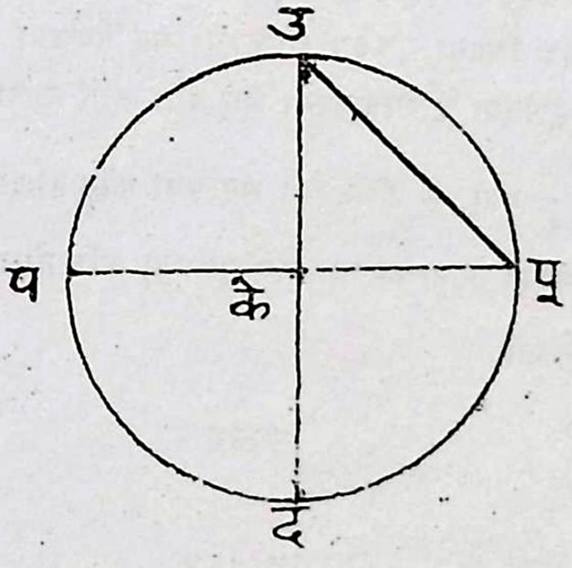
**षष्ठो भागः पालिजः षष्टि६०रंशास्**
**तत्पूर्णज्या त्रिज्यका संप्रदिष्टा ।।११३।।**

[परिधिको छैटौं भाग ६० अंश हुन्छ । ६० अंशको पूर्णज्या त्रिज्याले बराबर हुन्छ ।]

## ८ प्रक्रम—

### ९० अंशको पूर्णज्या ल्याउने रीति

पू उ प द वृत्त छ । सो वृत्तको केन्द्र के छ । पू प पूर्वापरव्यास तथा उ द याम्योत्तरव्यास छन् । ती दुइ व्यासका योगबाट केन्द्रमा बनेको पू के उ कोणको




[ १० चित्र ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

सम्मुखको चाप परिधिको चौथाइ ( ९० अंश ) छ । पू उ ९० अंश चापको पूर्णज्या पू उ रेखा हुन्छ ।

उ के पू जात्यत्रिभुजमा—

$$पू के^{२} + उ के^{२} = पू उ$$ [रेखागणित १ अ. ४७ प्र.]

$$पू उ = \sqrt{पू के^{२} + उ के^{२}} = \sqrt{त्रि^{२} + त्रि^{२}}$$

$$= \sqrt{२ त्रि^{२}}$$

$$\therefore ९०^{0} \text{ को पूर्णज्या} = \sqrt{२ त्रि^{२}}$$

**त्रिज्याकृत्या द्व्याऽहतायास् तु मूलं**
**पूर्णज्या स्याच् शून्यरन्ध्रां९०शकानाम् ।।१२।।**

[त्रिज्याको वर्गलाई २ ले गुनी गुणनफलको मूल लिनू, ९० अंशको पूर्णज्या हुन्छ ।]

## ६–प्रश्नमाला

(१) १ त्रिज्या भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?
(२) २४ त्रिज्या भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?
(३) ६० त्रिज्या भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?
(४) ६० अं को पूर्णज्या १२० भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?
(५) ६० अं को पूर्णज्या १५० भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?
(६) ६० अं को पूर्णज्या १९१ भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?
(७) ६० अं को पूर्णज्या ३४३८ भए ९० अं को पूर्णज्या कति होला ?

## उत्तर

(१) $\sqrt{२}$ (२) ३३·९४१ (३) ८४·८५३ (४) १६९·७०६
(५) २१२·१३२ (६) २७०·११५ (७) ४८६२·०६६

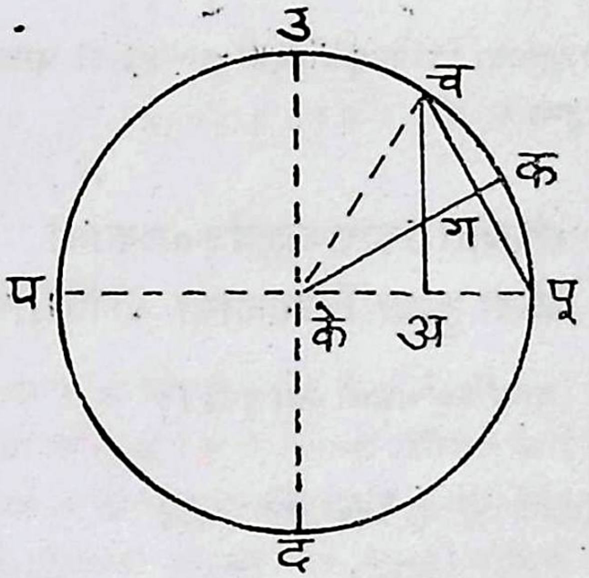
CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१० प्रक्रम—

## अभीष्ट चापको पूर्णज्या जानी त्यस चापको आधा चापको ज्या ल्याउने रीति

पू क च अभीष्ट चाप छ। त्यसको पूर्णज्या पू च रेखा छ। यी दुइवटा (चाप र पूर्णज्या) थाहा पाई पू क च चापको आधा पू क चापको ज्या ल्याउनुपरेको छ।

के बिन्दुबाट के क रेखा हाल। यो रेखाले पू च चापलाई आधा पारेको हुनाले पू क चापको सम्मुखमा रहेको पू के क कोण तथा क च चापको सम्मुखमा रहेको क के च कोण बराबर हुन्छन्। [७ प्रक्रमबाट]




[ ११ चित्र ]

के ग पू त्रिभुज र के ग च त्रिभुजमा—

के पू = के च [एउटै वृत्तका त्रिज्या भएकाले]

के ग उभयनिष्ठ

पू के क कोण = च के क कोण

∴ के ग पू त्रिभुज = के ग च त्रिभुज [रेखागणित १ अ. ४ प्र.]

∴ पू ग = च ग

के ग पू कोण = के ग च कोण

यसबाट के क रेखाले पू च पूर्णज्यालाई ग बिन्दुमा आधा गर्छ तथा सो के क रेखा त्यस पूर्णज्यामाथि लम्बरूप पनि छ भन्ने कुरा सिद्ध हुन्छ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

पू ग रेखा के क त्रिज्या रेखाको उपरमा लम्बरूप भएकोले पू क चापको ज्या सो पू ग रेखा हुन्छ [३ प्रक्रमबाट]। यो पू ग रेखा पू च पूर्णज्याको आधा हो।

यस कारण पू क च चापको पूर्णज्या पू च को आधा पू ग रेखा, पू क च चापको आधा पू क चापको ज्या हुन्छ भन्ने सिद्ध भयो।

इष्टांऽशानां पूर्णमौर्व्या दलेन
तुल्या मौर्वी स्यात् तदर्धांऽशकानाम् ॥१२½॥

[अभीष्ट अंशको पूर्णज्याको आधा नै अभीष्ट अंशको आधा अंशको ज्या हुन्छ।]

६० अंशको पूर्णज्या त्रिज्या हुने हुनाले ६० अंशको आधा ३० अंशको ज्या त्रिज्याको आधा हुन्छ।

संपद्येताऽकाशवह्न्यं३०शकानां
जीवा तुल्या त्रिज्यकाया दलेन ॥१३॥

[त्रिज्याको आधा ३० अंशको ज्या हुन्छ।]

$९०^{0}$ को पूर्णज्या $= \sqrt{२त्रि^{२}}$ हुने हुनाले

$$४५^{0} \text{ को ज्या} = \frac{\sqrt{२त्रि^{२}}}{२} = \sqrt{\frac{२त्रि^{२}}{४}} = \sqrt{\frac{त्रि^{२}}{२}}$$

त्रिज्याकृत्या द्व्या२हृतायास् तु मूलं
सिद्ध्येज् जीवा पञ्चवेदां४५शकानाम् ॥१३½॥

[त्रिज्याको वर्गलाई २ ले भाग लिई मूल लिनू, ४५ अंशको ज्या हुन्छ।]

१ उदाहरण— ३४३८ त्रिज्या भए ३० अंशको ज्या कति होला ?

$$३०^{\circ} \text{ को ज्या} = \frac{त्रि}{२} = \frac{३४३८}{२} = १७१९$$

२ उदाहरण— ३४३८ त्रिज्या भए ४५ अंशको ज्या कति होला ?

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$४५^\circ \text{ को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{त्रि}^२}{२}} = \sqrt{\frac{(३४३८)^२}{२}} = \sqrt{\frac{११८१९८४४}{२}}$$

$$= \sqrt{५९०९९२२} = २४३१\cdot०३३$$

अर्को रीति

$$४५^\circ \text{ को ज्या} = \frac{९०^\circ \text{ को पूर्णज्या}}{२} = \frac{४८६२\cdot०६६}{२}$$

[६ प्रश्नमालाको ७ प्रश्नको उत्तरबाट]

$$= २४३१\cdot०३३$$

## ७– प्रश्नमाला

३० अंश र ४५ अंशका ज्या ल्याऊ–

(१) १ त्रिज्या भएमा (२) २४ त्रिज्या भएमा

(३) ६० त्रिज्या भएमा (४) १२० त्रिज्या भएमा

(५) १५० त्रिज्या भएमा (६) १९१ त्रिज्या भएमा

(७) १००० त्रिज्या भएमा (८) ३२७० त्रिज्या भएमा

(९) ३४१५ त्रिज्या भएमा (१०) ३६०० त्रिज्या भएमा

(११) १०००० त्रिज्या भएमा (१२) ४५००००० त्रिज्या भएमा

(१३) १०००००००००० त्रिज्या भएमा

## उत्तर

(१) $\frac{१}{२}, \frac{१}{\sqrt{२}}$ (२) १२, १६·९७१ (३) ३०, ४२·४२६

(४) ६०, ८४·८५३ (५) ७५, १०६·०६६

(६) ९५·५, १३५·०५७ (७) ५००, ७०७·१०७

(८) १६३५, २३१२·२३९ (९) १७०७·५, २४१४·७७

(१०) १८००, २५४५·५८४ (११) ५०००, ७०७१·०६८

(१२) २२५००००, ३१८१९८०·५१५

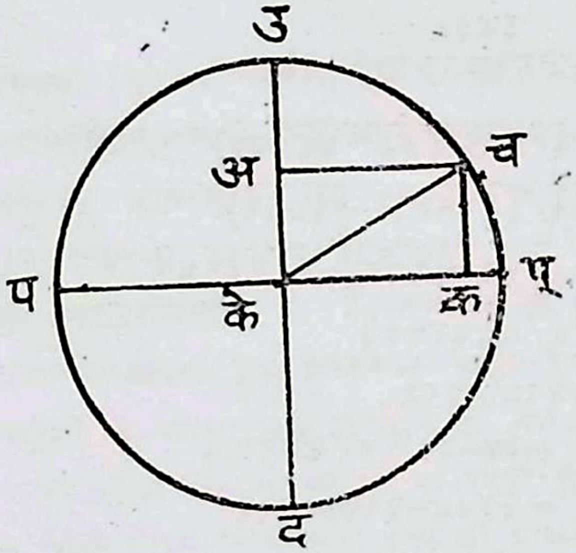
(१३) ५०००००००००, ७०७१०६७८११·८६५

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

११ प्रक्रम—

चापको अंश (आदि) लाई ९० अंशबाट घटाउनू, त्यस चापको 'कोटि' आउँछ ।

प$_१$ च चाप ३० अंशको छ । प$_१$ उ चाप ९० अंशको छ । यस कारण च उ चाप ६० अंशको हुन्छ । प$_१$ उ चाप (९० अंश) बाट प$_१$ च चाप घटाउँदा च उ चाप बाँकी रहन्छ । सो च उ चापलाई प$_१$ च चापको कोटि भन्दछन् । त्यस्तै च उ चापको कोटि प$_१$ च चाप पनि हुन्छ ।




[ १२ चित्र ]

चापांऽशाऽद्यैर् वर्जिताः शून्यरन्ध्र९०-
भागाः प्रोक्ताश् चापकोटयंशकाऽद्याः ॥१४॥

[चापको अंशादि ( अंश, कला, विकला ) लाई ९० अंशबाट घटाउनू, सो चापको अंशादि कोटि आउँछ ।]

उदाहरण—१५ अंश १० कला २० विकलाको कोटि बताऊ ।

९० अं ० क ० वि
१५ अं १० क २० वि
―――――――――
७४ अं ४९ क ४० वि

अतः अभीष्ट कोटि = ७४ अंश ४९ कला ४० विकला

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ८–प्रश्नमाला

तलका चापको कोटि बताऊ–

(१) १५ अं (२) ६० अं (३) ७८ अं
(४) ३ अं ४५ क (५) ३० अं ३० क (६) ६३ अं ४५ क
(७) ८६ अं १५ क (८) २१ अं २५ क १६ वि (९) ४५ अं १४ क ३० वि
(१०) ५४ अं ५४ क ५४ वि

## उत्तर

(१) ७५ अं (२) ३० अं (३) १२ अं
(४) ८६ अं १५ क (५) ५९ अं ३० क (६) २६ अं १५ क
(७) ३ अं ४५ क (८) ६८ अं ३४ क ४४ वि (९) ४४ अं ४५ क ३० वि
(१०) ३५ अं ५ क ६ वि

### १२ प्रक्रम–

१२ चित्रमा प॒ च चापको कोटि च उ चाप छ । च उ चापको ज्या च श्र छ । च श्र बराबर क के छ । प॒ च चापको कोटिज्या क के हो । यस कारण प॒ च चापको कोटिज्या र सो चापको कोटि च उ चापको ज्या श्र च बराबर हुन्छ । यताबाट चापको कोटिज्या बराबर त्यस चापको कोटिको ज्या हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ । यसै गरी च क बराबर श्र के भएकोले चापको ज्या बराबर त्यस चापको कोटिको कोटिज्या हुन्छ भन्ने पनि सिद्ध हुन्छ ।

इष्टांऽशानां या भवेत् कोटिजीवा
सिद्धचेत् सा तत्कोटिभागोत्थजीवा ।।१४३।।

[इष्ट अंशको (चापको) जो कोटिज्या हुन्छ, ती अंशको (चापको) कोटिको ज्या त्यही हुन्छ ।]

इष्टांऽशानां या भवेच् शिञ्जिनी सा
स्यात् कोटिज्या तद्धनुःकोटिसिद्धा ।।१५।।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[इष्ट अंशको (चापको) जो ज्या हुन्छ, ती अंशको (चापको) कोटिको कोटिज्या त्यही हुन्छ ।]

## ९–प्रश्नमाला

(१) ५५ अंश ५५ कलाको कोटिज्या कति अंशको ज्या होला ?
(२) ४५ अंश ५६ कलाको कोटिज्या कति अंशको ज्या होला?
(३) १२ अं २५ क ३५ वि को कोटिज्या कति अंशको कोटिको ज्या होला ?
(४) १७ अं ५५ क ५ वि को ज्या कति अंशको कोटिको कोटिज्या होला ?
(५) १८ अं १५ क २२ वि को ज्या कति अंशको कोटिको कोटिज्या होला ?
(६) ३० अंशको ज्या $\frac{१}{२}$ भए ६० अंशको ज्या कति होला ?
(७) ३० अंशको ज्या १२ भए ६० अंशको ज्या कति होला ?
(८) ३० अंशको ज्या ३० भए ६० अंशको ज्या कति होला ?
(९) ६० अंशको कोटिज्या ६० भए ३० अंशको कोटिज्या कति होला ?
(१०) ६० अंशको कोटिज्या ७५ भए ३० अंशको कोटिज्या कति होला ?
(११) ६० अंशको कोटिज्या १७१९ भए ३० अंशको कोटिज्या कति होला?

## उत्तर

(१) ३४ अं ५ क
(२) ४४ अं ४ क
(३) १२ अं २५ क ३५ वि
(४) १७ अं ५५ क ५ वि
(५) १८ अं १५ क २२ वि
(६) $\frac{\sqrt{३}}{२}$
(७) २०·७८५
(८) ५१·९६२
(९) १०३·९२३
(१०) १२९·९०४
(११) २९७७·३९५

## १३ उत्क्रम–

१ उदाहरण— १२० त्रिज्या भएमा ६० अंशको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$६०^\circ$ को उत्क्रमज्या = त्रि−$६०^\circ$ को कोटिज्या

= त्रि−$३०^\circ$ को ज्या

$= त्रि - \frac{त्रि}{२}$

$= \frac{त्रि}{२}$

$= \frac{१२०}{२}$

= ६०

२ उदाहरण— ३४३८ त्रिज्या भएमा ३० अंशको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

$३०^0$ को ज्या $= \frac{त्रि}{२} = \frac{३४३८}{२} = १७१९$

$३०^\circ$ को कोटिज्या $= \sqrt{त्रि^२ - (३०^\circ \text{ को ज्या})^२}$

$= \sqrt{(३४२८)^२ - (१७१९)^२}$

$= \sqrt{११८१९८४४ - २९५४९६१}$

$= \sqrt{८८६४८८३}$

= २९७७·३९५

∴ $३०^\circ$ को उत्क्रमज्या = त्रि−$३०^0$ को कोटिज्या

= ३४३८−२९७७·३९५

= ४६०·६०५

## १०—प्रश्नमाला

६० अंशको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

(१) १ त्रिज्या भएमा

(२) २४ त्रिज्या भएमा

(३) ६० त्रिज्या भएमा

(४) ३४३८ त्रिज्या भएमा

(५) १०,००० त्रिज्या भएमा

३० अंशको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

(६) १२० त्रिज्या भएमा

(७) १५० त्रिज्या भएमा

(८) ३२७० त्रिज्या भएमा

(९) ३६०० त्रिज्या भएमा

(१०) १०००० त्रिज्या भएमा

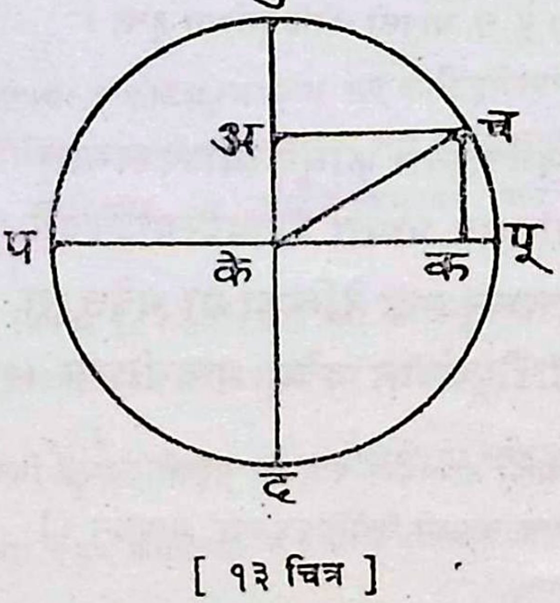
CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

(१) $\frac{१}{२}$ (२) १२ (३) ३०
(४) १७१९ (५) ५००० (६) १६·०७७
(७) २०·०९६ (८) ४३८·०९७ (९) ४८२·३०९
(१०) १३३९·७४६

## १४ प्रक्रम—

माथि ३ प्रक्रमको (२) मा "चापको एक प्रान्तबाट व्यासरेखा हाली त्यसका उपरमा अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्बरेखालाई त्यस चापको ज्या भन्दछन् ।" (४) मा "ज्याको मूल र केन्द्रको अन्तरलाई त्यस चापको कोटिज्या भन्दछन्" भनी लेखिएको छ । १२ प्रक्रममा चाहिं पू च चापको ज्या च क तथा अ के दुवै हुन्छ, पू च चापको कोटिज्याचाहिं क के तथा च अ दुवै हुन्छ भनी सिद्ध गरिएको छ । यताबाट चापको एक प्रान्तबाट पूर्वापरव्यास हाली सो व्यासको उपरमा लम्बरूप भएको याम्योत्तरव्यास हालनू र सो याम्योत्तरव्यासको उपरमा चापको अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्ब सो चापको कोटिज्या हुन्छ तथा कोटिज्याको मूलबाट केन्द्रसम्म रहेको याम्योत्तरव्यासको टुक्रो सो चापको ज्या हुन्छ भन्ने पनि सिद्ध हुन्छ ।




[ १३ चित्र ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

जस्तै— पू च चाप हो। पू प पूर्वापरव्यास तथा उ द याम्योत्तरव्यास छन्। पू च चापको च प्रान्तबिन्दुबाट उ द याम्योत्तरव्यासमा गरेको लम्ब च श्र सो पू च चापको कोटिज्या र श्र के चाहिं सो पू च चापको ज्या हुन्छ।

चापस्याऽन्यप्रान्ततः पात्यमानो
लम्बो व्यासे याम्यसौम्याऽभिधाने।
कोटिज्या स्यात् केन्द्रबिन्दुं च यावत्
कोटिज्याया मूलतः शिञ्जिनी वा ।।१६।।

[याम्योत्तरव्यासमा चापको अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्ब सो चापको कोटिज्या हुन्छ। कोटिज्याको मूलबाट केन्द्रसम्म सो चापको ज्या रहेको हुन्छ भने पनि हुन्छ।]

### १५ प्रक्रम—

कोटिज्याको मूल बिन्दुबाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दुसम्म रहेको याम्योत्तरव्यासको टुक्रोलाई त्यस चापको 'कोटचुत्क्रमज्या' भन्दछन्।

जस्तै— पू च चापको कोटिज्या च श्र हुन्छ भनी गएको प्रक्रममा लेखिएको छ। यो च श्र कोटिज्याको मूल श्र बिन्दु छ। सो श्र बिन्दुदेखि पहिलो पदको अन्त्य बिन्दु (उ बिन्दु) सम्म रहेको याम्योत्तरव्यासको टुक्रो श्र उ रेखा पू च चापको कोटचुत्क्रमज्या हुन्छ।

त्रिज्याबाट ज्या घटाइदियो भने कोटचुत्क्रमज्या बाँकी रहन्छ।

पू च चापको कोटचुत्क्रमज्या = श्र उ
= उ के - श्र के
= त्रिज्या - पू च चापको ज्या

कोज्यामूलात् प्राक्पदस्याऽन्त्यबिन्दुं
यावत् स्यात् तच्चापकोटचुत्क्रमज्या।
त्रिज्यामानं जीवया हीयमानं
सिद्धयेत् कोटिव्यस्तमौर्वीप्रमाणम् ।।१७।।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[कोटिज्याको मूल बिन्दुबाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दुसम्म रहेको रेखा (याम्योत्तरव्यासको टुक्रो) इष्ट चापको 'कोटच्युत्क्रमज्या' हुन्छ।
त्रिज्याबाट ज्या घटायो भने कोटच्युत्क्रमज्या आउँछ।]

उदाहरण— १२० त्रिज्या २ उत्क्रमज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?

कोटिज्या = त्रि − उत्क्रमज्या

= १२० − २ = ११८

ज्या = $\sqrt{\text{त्रि}^{२} - \text{कोटिज्या}^{२}}$

= $\sqrt{(१२०)^{२} - (११८)^{२}}$

= $\sqrt{१४४०० - १३९२४} = \sqrt{४७६}$ = २१·८१७

∴ कोटच्युत्क्रमज्या = त्रि − ज्या

= १२० − २१·८१७ = ९८·१८३

## ११–प्रश्नमाला

(१) १ त्रिज्या $\frac{३}{४}$ ज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(२) २४ त्रिज्या ९ ज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(३) ३२७० त्रिज्या ६० ज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(४) १२० त्रिज्या ४१ कोटिज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(५) ३४३८ त्रिज्या ४४९ कोटिज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(६) ३४३८ त्रिज्या २२६७ कोटिज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(७) ६० त्रिज्या ३० उत्क्रमज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(८) १२० त्रिज्या ७ उत्क्रमज्या भए कोटच्युत्क्रमज्या कति होला ?
(९) १२० त्रिज्या १६ कोटच्युत्क्रमज्या भए कोटिज्या कति होला ?
(१०) ३४३८ त्रिज्या १७१९ कोटच्युत्क्रमज्या भए कोटिज्या कति होला ?

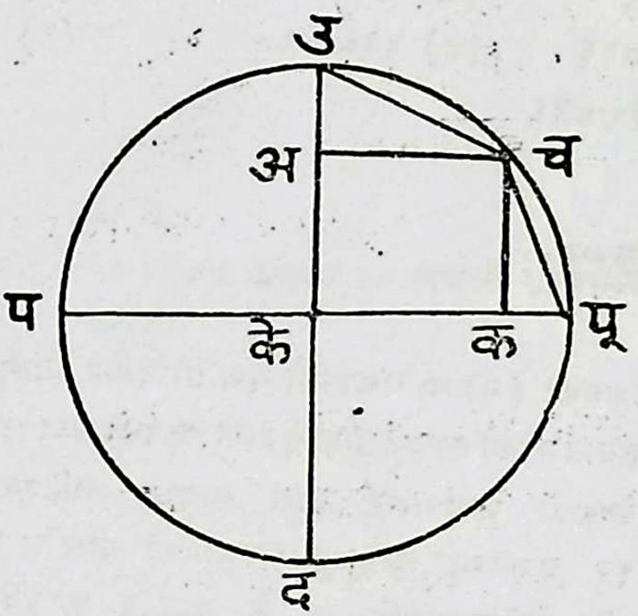
### उत्तर

(१) $\frac{१}{४}$ (२) १५ (३) ३२१०
(४) ७·२२१ (५) २९·४४६ (६) ८५३·३२३
(७) ८·०३८ (८) ७९·६१४ (९) ५९·८६७
(१०) २९७७·३९५

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## १८ प्रक्रम–

चापको अर्को प्रान्त (ज्याको शीर्षबिन्दु) बाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दु-सम्म जाने वृत्तभित्र रहने रेखालाई त्यस चापको 'कोटिपूर्णज्या' भन्दछन् ।




[ १४ चित्र ]

जस्तै— पू च चाप हो । यसका ज्या च क वा अ के, कोटिज्या के क वा अ च, उत्क्रमज्या क पू, कोटयुत्क्रमज्या अ उ तथा पूर्णज्या पू च रेखा छन् । चापको पहिलो प्रान्त (व्यासरेखा गरेको प्रान्त) पू हो । चापको अर्को प्रान्त(च क ज्याको शीर्षबिन्दु) च हो । सो च बिन्दुबाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दु उ सम्म गरेको च उ रेखा पू च चापको कोटिपूर्णज्या हुन्छ ।

निर्गच्छन्ती कार्मुकस्याऽपरस्मात्
प्रान्तात् प्राप्ता प्राक्पदस्याऽन्त्यबिन्दुम् ।
वृत्तान्तःस्था रेखिका या भवेत् सा
कोटीपूर्णज्या भवेत् धन्वनोऽस्य ।।१८।।

[चापको अर्को प्रान्तबाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दुसम्म जाने वृत्तभित्र रहने रेखालाई त्यस चापको 'कोटिपूर्णज्या' भन्दछन् ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## कोटिपूर्णज्या ल्याउने रीति

१४ चित्रमा अ च कोटिज्या, अ उ कोटचुत्क्रमज्या तथा च उ कोटिपूर्णज्या छन् ।

च उ रेखाको वर्ग = अ च$^2$ + अ उ$^2$

अतः कोटिपूर्णज्या$^2$ = कोटिज्या$^2$ + कोटचुत्क्रमज्या$^2$

कोटिपूर्णज्या = $\sqrt{\text{कोटिज्या}^2 + \text{कोटचुत्क्रमज्या}^2}$

यताबाट कोटिज्या र कोटचुत्क्रमज्याको वर्गयोगको मूल कोटिपूर्णज्या हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ ।

कोटिज्यायाम् आत्मना संगुणायां
योज्या स्वघ्नी कोटिजातोत्क्रमज्या ।
अस्या युत्या आनयेद् वर्गमूलं
सिद्धचेत् कोटीपूर्णजीवाप्रमाणम् ।।१९।।

[कोटिज्याको वर्गमा कोटचुत्क्रमज्याको वर्ग जोडी योगको मूल गर्नू, कोटिपूर्णज्या हुन्छ ।]

### १२–प्रश्नमाला

(१) ४ कोटिज्या ३ कोटचुत्क्रमज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(२) ४१ कोटिज्या ७ कोटचुत्क्रमज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(३) १३० कोटिज्या ७५ कोटचुत्क्रमज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(४) १२० त्रिज्या १०४ कोटिज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(५) १५० त्रिज्या १४५ कोटिज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(६) $\frac{१}{२}$ ज्या $\frac{\sqrt{३}}{२}$ कोटिज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(७) ९० ज्या १२० कोटिज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(८) ३४३८ त्रिज्या १७१९ कोटयुत्क्रमज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(९) १०४ ज्या १६ कोटयुत्क्रमज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

(१०) १३० कोटिज्या २० उत्क्रमज्या भए कोटिपूर्णज्या कति होला ?

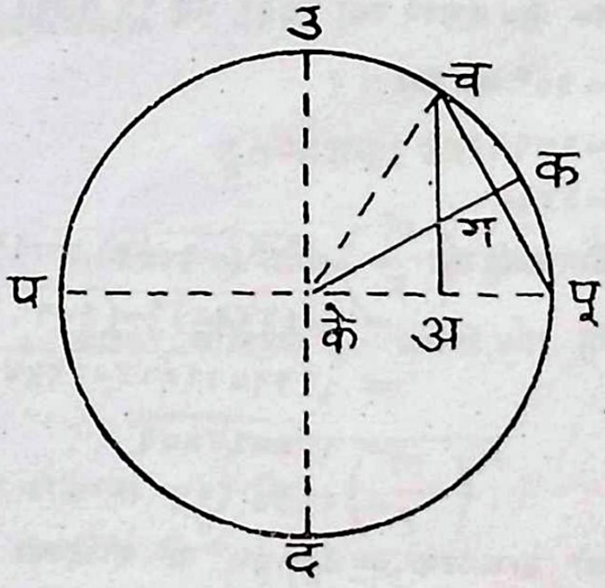
## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) ५ | (२) ४१·५९३ | (३)१५०·०८३ |
| (४)१२०·१३३ | (५) १८२·९७१ | (६) १ |
| (७) १३४·१६४ | (८) ३४३८ | (९) ६१·९६८ |
| (१०) १५०·१६७ | | |

१७ प्रक्रम—

## अभीष्ट चापको ज्या र उत्क्रमज्या थाहा पाई त्यस चापको आधा चापको ज्या ल्याउने रीति

पू क च चापको ज्या च अ तथा उत्क्रमज्या अ पू थाहा पाई पू क च चापको आधा पू क चापको ज्या थाहा पाउनुपरेको छ ।




[ १५ चित्र ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

पू च पूर्णज्या $= \sqrt{\text{च अ}^2 + \text{अ पू}^2}$

$= \sqrt{\text{ज्या}^2 + \text{उत्क्रमज्या}^2}$

$\therefore$ पू क चापको ज्या = पू ग

= पू च पूर्णज्याको आधा

[ १० प्रक्रमबाट ]

$= \dfrac{\sqrt{\text{ज्या}^2 + \text{उत्क्रमज्या}^2}}{२}$

$\therefore$ इष्ट चापको आधा चापको ज्या

$= \dfrac{\sqrt{(\text{इष्ट चापको ज्या})^2 + (\text{इष्ट चापको उत्क्रमज्या})^2}}{२}$

क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्
दलं तदर्धांऽशकशिञ्जिनी स्यात् ।।१९३।।

(सिद्धान्तशिरोमणि छेद्यकाधिकार ४ श्लोक)

[इष्ट अंशको ज्या र उत्क्रमज्याको वर्गयोगको मूलको आधा गर्नू, इष्ट अंशको आधाको ज्या हुन्छ ।]

उदाहरण– ३० अंशको ज्या १७१९ भए १५ अंशको ज्या कति होला ?

त्रिज्या $=$ ३०$^{\circ}$ को ज्या $\times$ २

$=$ १७१९ $\times$ २

$=$ ३४३८

$\therefore$ ३०$^{\circ}$ को कोटिज्या $= \sqrt{\text{त्रि}^2(-\text{३०°को ज्या})^2}$

$= \sqrt{(\text{३४३८})^2 - (\text{१७१९})^2}$

$= \sqrt{\text{११८१९८४४} - \text{२९५४९६१}}$

$= \sqrt{\text{८८६४८८३}}$

$=$ २९७७·३९५

३०$^{\circ}$ को उत्क्रमज्या $=$ त्रि–३०$^{\circ}$ को कोटिज्या

$=$ ३४३८–२९७७·३९५

$=$ ४६०·६०५

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$\therefore १५^{\circ}\ \text{को ज्या} = \frac{\sqrt{(३०^{\circ}\ \text{को ज्या})^{२} + (३०^{\circ}\ \text{को उत्क्रमज्या})^{२}}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{(१७१९)^{२} + (४६०\cdot६०५)^{२}}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{२९५४९६१ + २१२१५६\cdot९६६०२५}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३१६७११७\cdot९६६०२५}}{२} = \frac{१७७९\cdot६३९}{२}$$

$$= ८८९\cdot८२\ (\text{आसन्न})$$

## १३– प्रश्नमाला

१५ अंश र ७ अंश ३० कलाका ज्या ल्याऊ।

(१) १००० त्रिज्या भएमा

(२) ३२७० त्रिज्या भएमा

(३) ३४३८ त्रिज्या भएमा

(४) ३६०० त्रिज्या भएमा

(५) १०००० त्रिज्या भएमा

## उत्तर

(१) २५८·८१९, १३०·५२६

(२) ८४६·३३८, ४२६·८२१

(३) ८८९·८२, ४४८·७४९

(४) ९३१·७४८, ४६९·८९४

(५) २५८८·१९, १३०५·२६२

### १८ प्रक्रम–

## अभीष्ट चापको उत्क्रमज्या र त्रिज्या थाहा पाई त्यस चापको आधा चापको ज्या ल्याउने रीति

इष्ट चापको आधा चापको ज्या

$$= \frac{\sqrt{\text{ज्या}^{२} + \text{उत्क्रमज्या}^{२}}}{२}\ [१७\ \text{प्रक्रमबाट}]$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$=\frac{\sqrt{\text{ज्या}^२+(\text{त्रि}-\text{कोटिज्या})^२}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{ज्या}^२+\text{त्रि}^२-२\text{त्रि. कोटिज्या}+\text{कोटिज्या}^२}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{(\text{ज्या}^२+\text{कोटिज्या}^२)+\text{त्रि}^२-२\text{ त्रि. कोटिज्या}}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{त्रि}^२+\text{त्रि}^२-२\text{ त्रि. कोटिज्या}}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{२\text{ त्रि}^२-२\text{ त्रि. कोटिज्या}}}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{२\text{ त्रि }(\text{त्रि}-\text{कोटिज्या})}}{२}$$

$$=\sqrt{\frac{२\text{ त्रि. उत्क्रमज्या}}{४}}$$

$$=\sqrt{\frac{\text{त्रि}\times\text{उत्क्रमज्या}}{२}}$$

त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर् दलस्य
मूलं तदर्धांऽशकशिञ्जिनी वा ।।२०।।

(सिद्धान्तशिरोमणि छेद्यकाधिकार ४$\frac{१}{२}$ श्लोक)

[अथवा इष्ट अंशको उत्क्रमज्या र त्रिज्याको गुणनफलको आधाको मूल गर्नू, इष्ट अंशको आधाको ज्या हुन्छ ।]

उदाहरण— ३० अंशको ज्या १७१९ भए १५ अंशको ज्या कति होला ?

त्रिज्या $=$ ३०$^०$ को ज्या $\times$ २ $=$ १७१९ $\times$ २ $=$ ३४३८

३०$^०$ को उत्क्रमज्या $=$ ४६०·६०५ [१७ प्रक्रमको उदाहरणबाट]

$$\therefore १५^० \text{ को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{त्रि}\times ३०^० \text{ को उत्क्रमज्या}}{२}}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$= \sqrt{\frac{३४३८ \times ४६०·६०५}{२}}$$

$$= \sqrt{१७१९ \times ४६०·६०५}$$

$$= \sqrt{७९१७७९·९९५}$$

$$= ८८९·८२$$

## १४—प्रश्नमाला

२२ अंश ३० कला र ११ अंश १५ कलाका ज्या ल्याऊ ।

(१) २४ त्रिज्या भएमा
(२) १२० त्रिज्या भएमा
(३) १९१ त्रिज्या भएमा
(४) ३४१५ त्रिज्या भएमा
(५) १०००० त्रिज्या भएमा

## उत्तर

(१) ९·१८४, ४·६८२
(२) ४५·९२२, २३·४११
(३) ७३·०९३, ३७·२६२
(४) १३०६·८६४, ६६६·२३३
(५) ३८२६·८३४, १९५०·९०३

### १६ प्रक्रम—

## ६० अंशको ज्या

३० अंशको ज्या त्रिज्याको आधा $\left(\frac{त्रि}{२}\right)$ हुन्छ भनी माथि १० प्रक्रममा लेखिएको छ । ३० अंशको कोटिज्या ६० अंशको ज्या हुन्छ भनी १२ प्रक्रममा लेखिएको छ ।

$$३०^{0} \text{ को कोटिज्या} = \sqrt{त्रि^{२} - \left(\frac{त्रि}{२}\right)^{२}}$$

$$= \sqrt{\frac{४\,त्रि^{२} - त्रि^{२}}{४}}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$=\frac{\sqrt{3}\,\text{त्रि}^2}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{त्रि}$$

$$\therefore\ 60^\circ\ \text{को ज्या} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{त्रि}$$

**त्रिज्यावर्गात् त्र्या३हताद् आप्तमूलं**
**द्वा२भ्यां भक्तं स्यात् खषड्६०भागजीवा ।।२०½।।**

[त्रिज्याको वर्गलाई ३ ले गुनी गुणनफलको मूल लिनू, आएको मूललाई २ ले भाग लिनू, ६० अंशको ज्या हुन्छ ।]

## १५ अंशको ज्या

$$15^\circ\ \text{को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{त्रि} \times 30^\circ\ \text{को उत्क्रमज्या}}{2}}\ [\text{१८ प्रक्रमबाट}]$$

$$\because 30^\circ\ \text{को उत्क्रमज्या} = \text{त्रि} - 30^\circ\ \text{को कोटिज्या}\ [\text{५ प्रक्रमबाट}]$$

$$= \text{त्रि} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{त्रि}$$

$$\therefore\ 15^\circ\ \text{को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{त्रि}}{2} \times \left(\text{त्रि} - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{त्रि}\right)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\text{त्रि} \times \text{त्रि}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}\text{त्रि}^2\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{त्रि}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{त्रि}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^*$$

---

*वर्गे करण्या यदि वा करण्योस्
तुल्यानि रूपाण्यथवा बहूनाम् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$=\frac{\text{त्रि}\sqrt{३}-\text{त्रि}}{२\sqrt{२}}$$

$$=\frac{\sqrt{३\ \text{त्रि}^{२}}-\text{त्रि}}{२\sqrt{२}}$$

$$=\frac{\sqrt{३\text{त्रि}^{२}}-\text{त्रि}}{\sqrt{८}}$$

---

विशोधयेद् रूपकृतेः पदेन
शेषस्य रूपाणि युतोनितानि ।।१७।।
पृथक् तदर्धे करणीद्वयं स्यान् मूले ... ।
ऋणात्मिका चेत् करणी कृतौ स्याद्
धनात्मिकां तां परिकल्प्य साध्ये ।
मूले करण्यावनयोरभीष्टा
क्षयात्मिकैका सुधियाऽवगम्या ।।१९।।

(भास्करीय बीजगणित करणीषड्विध)

[अकरणीगत राशिसहित भएको करणीगत राशिरूप द्वियुक्पद[1]को मूल ल्याउनुपर्दा अकरणीगत राशिको वर्गबाट करणीगत राशिलाई घटाउनू र शेषको मूल लिनू । आएको मूललाई अकरणीगत राशिमा जोडी आधा गर्नू, आएकै मूललाई अकरणीगत राशिबाट घटाएर पनि आधा गर्नू । आएका यी दुइ पद करणीरूप भई अभीष्ट द्वियुक्पदका वर्गमूल हुन्छन् ।

अभीष्ट द्वियुक्पदमा करणीगत पद ऋणात्मक छ भने क्रिया गर्दा सो ऋण चिह्नको ख्याल राख्नुपर्दैन । आएको मूलमा भने एउटा करणीगत पद ऋणात्मक हुन्छ । ]

जस्तै—$२+\sqrt{३}$ यस द्वियुक्पदको वर्गमूल ल्याउँदा

---

१. भास्करको यस सूत्रमा अकरणीगत राशिसहित भएको करणीगत राशिरूप बहुयुक्पदको मूल ल्याउने रीति पनि परेको छ । तर यहाँ त्यसको प्रयोजन नहुँदा यसको व्याख्यान अहिले यहाँ गरिएको छैन । पछि प्रसङ्ग मिलाई सो व्याख्यान गरिनेछ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

त्रिज्याकृत्या वह्नि३भिः संगुणाया
मूलात् त्रिज्यां शोधयित्वाऽऽप्तशेषः ।।२१।।
भाज्योऽष्टाद्नां वर्गमूलेन लब्धिः
सिद्ध्येज् जीवा पञ्चचन्द्रां१५शकानाम् ।।२१½।।

[त्रिज्याको वर्गलाई ३ ले गुनी गुणनफलको मूल लिनू, आएको मूलबाट त्रिज्या घटाउनू, आएको शेषलाई आठको मूल($\sqrt{८}$)ले भाग लिनू, १५ अंशको ज्या हुन्छ ।]

## ७५ अंशको ज्या

१५° को कोटिज्या $= \sqrt{\text{त्रि}^{२} - (\text{१५° को ज्या})^{२}}$

$$= \sqrt{\text{त्रि}^{२} - \left( \frac{\sqrt{३\text{त्रि}^{२}} - \text{त्रि}}{२\sqrt{२}} \right)^{२}}$$

$$= \sqrt{\text{त्रि}^{२} - \frac{३\ \text{त्रि}^{२} - २\ \text{त्रि}.\ \sqrt{३\ \text{त्रि}^{२}} + \text{त्रि}^{२}}{४ \times २}}$$

---

$\sqrt{२^{२} - ३} = १$ । $\frac{२+१}{२} = \frac{३}{२}$ । $\frac{२-१}{२} = \frac{१}{२}$

यस कारण अभीष्ट मूलका करणीगत पद $\frac{३}{२}$ तथा $\frac{१}{२}$ भए ।

$$\therefore \sqrt{२+\sqrt{३}} = \sqrt{\tfrac{३}{२}} + \sqrt{\tfrac{१}{२}} = \frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt{२}}$$

यसै गरी २$-\sqrt{३}$ को वर्गमूल ल्याउँदा

$\sqrt{२^{२} - ३} = १$ । $\frac{२+१}{२} = \frac{३}{२}$ । $\frac{२-१}{२} = \frac{१}{२}$

अभीष्ट द्वियुक्पदको करणीगत पद ऋणात्मक भएकोले आएको मूलमा एउटा करणीगत पद ऋणात्मक हुन्छ ।

$$\therefore \sqrt{२-\sqrt{३}} = \sqrt{\tfrac{३}{२}} - \sqrt{\tfrac{१}{२}} = \frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{२}}$$

यहाँ धनात्मक मूल अपेक्षित हुँदा सानो पदलाई ऋणात्मक मानिएको हो ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$=\sqrt{\text{त्रि}^{२}-\frac{४\,\text{त्रि}^{२}-२\sqrt{३}\,\text{त्रि}^{२}}{४\times२}}$$

$$=\sqrt{\text{त्रि}^{२}-\frac{२\,\text{त्रि}^{२}-\sqrt{३}\,\text{त्रि}^{२}}{४}}$$

$$=\sqrt{\frac{२\,\text{त्रि}^{२}+\sqrt{३}\,\text{त्रि}^{२}}{४}}$$

$$=\frac{\text{त्रि}}{२}\sqrt{२+\sqrt{३}}$$

$$=\frac{\text{त्रि}}{२}\left(\frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt{२}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{३\,\text{त्रि}^{२}}+\text{त्रि}}{२\sqrt{२}}$$

$$=\frac{\sqrt{३\,\text{त्रि}^{२}}+\text{त्रि}}{\sqrt{८}}$$

$$\text{७५° को ज्या} = \text{१५° कोटिज्या}$$

$$=\frac{\sqrt{३\,\text{त्रि}^{२}}+\text{त्रि}}{\sqrt{८}}$$

त्रिज्याकृत्या वह्नि३भिः संगुणाया
मूले त्रिज्यां योजयित्वाऽऽप्तयोगः ॥२२॥
भाज्योऽष्टाद्नां वर्गमूलेन लब्धिः
सिद्धचेज् जीवा पञ्चशैलां७५शकानाम् ॥२२½॥

[त्रिज्याको वर्गलाई ३ ले गुनी गुणनफलको मूल लिनू, आएको मूलमा त्रिज्या जोड्नू, योगफललाई आठको मूल($\sqrt{८}$)ले भाग लिनू, ७५ अंशको ज्या हुन्छ ।]

$$\text{७५°को कोटिज्या} = \text{१५° को ज्या}$$

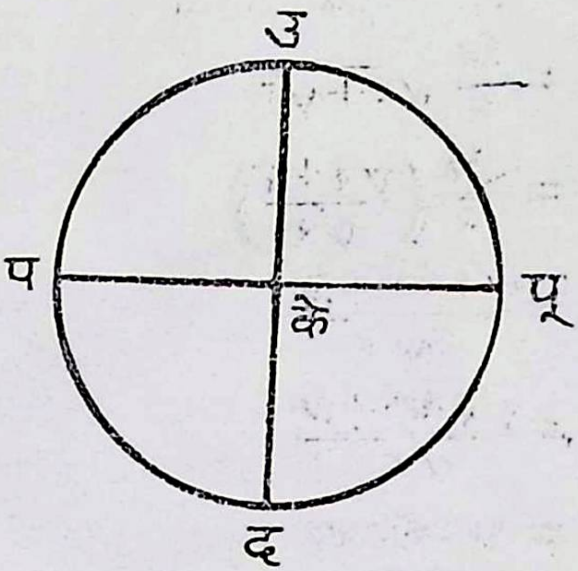
$$=\frac{\sqrt{३\,\text{त्रि}^{२}}-\text{त्रि}}{२\sqrt{२}}$$

$$=\frac{\sqrt{३\,\text{त्रि}^{२}}-\text{त्रि}}{\sqrt{८}}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ० र ९० अंशका ज्या

पू प पूर्वापरव्यास तथा उ द याम्योत्तरव्यास छन् । यहाँ चाप ० अंश मात्र भएमा चापको आदि तथा अन्त्य बिन्दु पू नै हुन्छ । यस कारण चापको अन्त्य बिन्दु नै पू प रेखामा भएकोले सो बिन्दुबाट पू प रेखामा लम्ब गर्न सकिँदैन अर्थात् लम्ब ० हुन्छ । यस कारण ० अंशको ज्या ० हुन्छ ।




[ १६ चित्र ]

पू उ तुल्य चाप भएमा अर्थात् चाप ट्वाक्क ९० अंश भएमा चापको आदि (पू) बिन्दुबाट गरेको पू प पूर्वापरव्यासको उपरमा चापको अन्त्य (उ) बिन्दुबाट गरेको लम्ब उ के हुन्छ । सो उ के, पू उ प द वृत्तको त्रिज्या (अर्धव्यास) हो । यस कारण ९० अंशको ज्या त्रिज्याले बराबर हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ ।

शून्या० जीवा शून्य०भागस्य सिद्ध्येत्
खाऽङ्कां९०शानां शिञ्जिनी स्यात् त्रिभज्या ।।२३।।

[ ० अंशको ज्या ० हुन्छ । ९० अंशको ज्या त्रिज्या हुन्छ ।[१] ]

ज्याको मूलबाट केन्द्रसम्म कोटिज्या रहने हुनाले ० अंशको कोटिज्या पू के अर्थात् त्रिज्या हुन्छ । ९० अंशको कोटिज्याचाहिँ ० हुन्छ, किनभने यहाँ ज्याको मूल केन्द्रमा नै परेको छ ।

---

१. ९० अंश अर्थात् ३ राशि (त्रिभ = त्रि) को ज्या अर्धव्यासले बराबर हुन्छ । त्रि (३ राशि) को ज्या हुने भएकोले नै अर्धव्यासको नाम त्रिज्या हुन गएको हो ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## २० प्रक्रम–

पन्ध्र पन्ध्र अंश फरक पारी ० अंशदेखि ९० अंशसम्मका माथि ल्याइएका ज्या तथा कोटिज्या क्रमैसँग तल दिइन्छन् ।[1]

---

१. ० अंशको ज्या—

शून्या० जीवा शून्य०भागस्य सिद्धयेत् ।

१५ अंशको ज्या—

त्रिज्याकृत्या वह्नि३भिः संगुणाया
मूलात् त्रिज्यां शोधयित्वाऽऽप्तशेषः ।
भाज्योऽष्टा८नां वर्गमूलेन लब्धिः
सिद्धयेज् जीवा पञ्चचन्द्रां१५शकानाम् ।

३० अंशको ज्या—

संपद्येताऽऽकाशवह्न्यं३०शकानां
जीवा तुल्या त्रिज्यकाया दलेन ।

४५ अंशको ज्या—

त्रिज्याकृत्या द्वया२हृतायास् तु मूलं
सिद्धयेज् जीवा पञ्चवेदां४५शकानाम् ।

६० अंशको ज्या—

त्रिज्यावर्गात् त्र्या३हृताद् आप्तमूलं
द्वा२भ्यां भक्तं स्यात् खषड्६०भागजीवा ।

७५ अंशको ज्या—

त्रिज्याकृत्या वह्नि३भिः संगुणाया
मूले त्रिज्यां योजयित्वाऽऽप्तयोगः ।
भाज्योऽष्टा८नां वर्गमूलेन लब्धिः
सिद्धयेज् जीवा पञ्चशैलां७५शकानाम् ।

९० अंशको ज्या—

खाऽङ्कां९०शानां शिञ्जिनी स्यात् त्रिभज्या ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## १ सारणी

| अंश | ज्या | कोटिज्या |
|---|---|---|
| ०° | ० | त्रि |
| १५° | $\frac{\sqrt{३\ त्रि^२}-त्रि}{\sqrt{८}}$ | $\frac{\sqrt{३\ त्रि^२}+त्रि}{\sqrt{८}}$ |
| ३०° | $\frac{त्रि}{२}$ | $\frac{\sqrt{३\ त्रि^२}}{२}$ |
| ४५° | $\sqrt{\frac{त्रि^२}{२}}$ | $\sqrt{\frac{त्रि^२}{२}}$ |
| ६०° | $\frac{\sqrt{३\ त्रि^२}}{२}$ | $\frac{त्रि}{२}$ |
| ७५° | $\frac{\sqrt{३\ त्रि^२}+त्रि}{\sqrt{८}}$ | $\frac{\sqrt{३\ त्रि^२}-त्रि}{\sqrt{८}}$ |
| ९०° | त्रि | ० |

## २ सारणी

| अंश | ज्या | कोटिज्या |
|---|---|---|
| ०° | ० | १ |
| १५° | $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$ | $\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$ |
| ३०° | $\frac{१}{२}$ | $\frac{\sqrt{३}}{२}$ |
| ४५° | $\frac{१}{\sqrt{२}}$ | $\frac{१}{\sqrt{२}}$ |
| ६०° | $\frac{\sqrt{३}}{२}$ | $\frac{१}{२}$ |
| ७५° | $\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$ | $\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$ |
| ९०° | १ | ० |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१ सारणीमा आएका ज्या तथा कोटिज्यालाई १ त्रिज्यामा परिणत गरी भिन्न तथा करणीगतरूपमा २ सारणीमा लेखिएको छ ।

१ त्रिज्या मानी काम गर्दा लाघव हुन्छ । यस कारण आजभोलिका गणितज्ञ-हरू प्रायः १ त्रिज्या मानी त्रिकोणमितिहरूमा काम गर्छन् । तर १ त्रिज्या मान्दा करणीगतरूपमा आएका ज्या-कोटिज्याहरूबाट व्यवहार चल्दैन । यस कारण व्यवहारमा करणीगत संख्याको दशमलवरूप बनाई आएका ज्या-कोटिज्याहरूलाई इष्ट त्रिज्याले गुनी इष्ट ज्याहरू ल्याई व्यवहार गर्ने गर्छन् ।

२ सारणीलाई दशमलवमा रूपान्तर गर्दा—

## ३ सारणी

| अंश | ज्या | कोटिज्या |
|---|---|---|
| ०° | ० | १ |
| १५° | ·२५८८२ | ·९६५९३ |
| ३०° | ·५ | ·८६६०३ |
| ४५° | ·७०७११ | ·७०७११ |
| ६०° | ·८६६०३ | ·५ |
| ७५° | ·९६५९३ | ·२५८८२ |
| ९०° | १ | ० |

उदाहरण— ३४३८ त्रिज्या भएमा १५ अंशको ज्या ल्याऊ ।

१ त्रिज्या भएमा १५° को ज्या ·२५८८२ हुन्छ ।

∴ अभीष्ट ज्या = ·२५८८२ × ३४३८

= ८८९·८२३ (आसन्न)

## १५—प्रश्नमाला

तलका त्रिज्या भएमा १५, ३०, ४५, ६०, ७५ अंशका ज्या दशमलव तीन स्थानसम्म ल्याऊ ।

(१) २४ त्रिज्या भएमा ।  (२) १५० त्रिज्या भएमा

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

(१) ६·२१२, १२, १६·९७१, २०·७८५, २३·१८२ ।
(२) ३८·८२३, ७५, १०६·०६६, १२९·९०४, १४४·८८९ ।

## २१ प्रक्रम–

### ४ सारणी

| चापको अंश | २४ त्रिज्या ज्या | २४ त्रिज्या ज्याखण्ड (अन्तर) | १५० त्रिज्या ज्या | १५० त्रिज्या ज्याखण्ड (अन्तर) |
|---|---|---|---|---|
| ०° | ० | | ० | |
| | | ६ | | ३९ |
| १५° | ६ | | ३९ | |
| | | ६ | | ३६ |
| ३०° | १२ | | ७५ | |
| | | ५ | | ३१ |
| ४५° | १७ | | १०६ | |
| | | ४ | | २४ |
| ६०° | २१ | | १३० | |
| | | २ | | १५ |
| ७५° | २३ | | १४५ | |
| | | १ | | ५ |
| ९०° | २४ | | १५० | |

दशमलवरूपमा आएका ज्यामा "अर्धाऽधिके रूपं ग्राह्यम्, अर्धाऽल्पे रूप त्याज्यम्" (आधाभन्दा बढ्ता भए १ लिनू, आधाभन्दा कम भए १ छोड्नू = दुइ दामभन्दा बढ्ता भए १ पैसा लिनू, दुइ दामभन्दा कम भए छोड्नू) भन्ने नियम-

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

को अनुसरण गरी दशमलव भाग छोडी पूर्णाङ्क मात्र लिई यस सारणीमा ज्याका मान दिइएका छन् ।

० अंशको ज्या ० हुन्छ । १५ अंशको ज्या ६ हुन्छ । ६ बाट ० घटाउँदा ६ बाँकी रहन्छ । यो पहिलो ज्याखण्ड (ज्यान्तर) हुन्छ । ३० अंशको ज्या १२ हुन्छ, यसबाट १५ अंशको ज्या ६ घटाउँदा ६ नै बाँकी रहन्छ । यो दोस्रो ज्याखण्ड हुन्छ । यसै गरी ४५ अंशको ज्याबाट ३० अंशको ज्या घटाई बाँकी रहेको ५ तेस्रो ज्याखण्ड हुन्छ । यसै गरी अरू ज्याखण्ड ल्याउनुपर्छ । २४ त्रिज्या भएमा यो उदाहरण दिइएको छ । अरू त्रिज्या भएमा पनि यसै गरी ज्याखण्ड ल्याउनुपर्छ ।

यहाँ २४ त्रिज्या हुँदा आएका ज्याका अन्तरलाई वि. सं. १५७७ मा बनेको ग्रहलाघवमा गणेश दैवज्ञले दिएका छन् । जस्तै—

षट्षडिषूदधिदृक्कुभि ६।६।५।४।२।१ रर्धैः
खेटभुजांऽशदिनां१५शमितैक्यम् ।

(त्रिप्रश्नाधिकार ११½ श्लोक)

[६, ६, ५, ४, २, १, यी खण्ड हुन् । ग्रहको भुजांश (चापको अंश) लाई १५ ले भाग लिनू, आएको लब्धितुल्य संख्याका खण्डको योग गर्नू (ज्या हुन्छ) ।[1]]

त्रिज्या १५० हुंदा आएका ज्याका अन्तरलाई वि. सं. ७२२ मा बनेको खण्डखाद्यकमा ब्रह्मगुप्तले दिएका छन् । जस्तै —

त्रिंशत्सनवरसेन्दुजिनतिथिविषया
३९।३६।३१।२४।१५।५ गृहार्द्ध १५चापानाम् ।
अर्धज्याखण्डानि ज्याभुक्तैक्यं ...

(त्रिप्रश्नाधिकार ७ श्लोक)

---

१. गणेश दैवज्ञले ज्यालाई क्रान्ति भन्ने नाम दिएका छन् । सूर्यको भुजांश १५ अंश हुँदा सूर्यको स्थूल (मोटामोटी) क्रान्ति ६ अंश हुन्छ । २४ त्रिज्या हुँदा १५ अंशको स्थूल ज्या ६ हुन्छ । यस कारण दुवैतिर मिल्ने गरी गणेश दैवज्ञले यस्तो बोलेका हुन् ।

भुजांशको विशेष चर्चा पछि यही त्रिकोणमितिमा र क्रान्तिको विशेष चर्चा चापीय त्रिकोणमितिमा गरिनेछ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[राशिका आधा (१५।१५ अंश) तुल्य चापका ज्याका खण्ड (अन्तर) ३९, ३६, ३१, २४, १५, ५ हुन्छन् । भुक्तखण्ड (गएका अन्तर) को योग गर्नु, ज्या हुन्छ ।]

गणेश तथा ब्रह्मगुप्तले क्रमैले २४ तथा १५० त्रिज्या मानी ज्याखण्ड दिएका छन् । ती ज्याखण्डबाट ज्या ल्याउनुपर्दा अंशको संख्यालाई १५ ले भाग लिँई लब्धिको संख्यातुल्य गतखण्डको योग गरी ज्या ल्याउनुपर्छ ।

१ उदाहरण— २४ त्रिज्यामा ४५ अंशको ज्या ल्याउँदा ४५ लाई १५ ले भाग लिदा ३ लब्धि आउँछ । यस कारण तीनवटा ज्याखण्डको योग गरी इष्ट ज्या ल्याउनुपर्छ ।

∴ ४५° को ज्या = ६ + ६ + ५
= १७ [२४ त्रिज्या भएमा]

२ उदाहरण— १५० त्रिज्यामा ७५ अंशको ज्या ल्याउँदा ७५ ÷ १५ = ५ ।

∴ ७५° को ज्या = ३९ + ३६ + ३१ + २४ + १५
= १४५ [१५० त्रिज्या भएमा]

अहिलेसम्म त्रिकोणमिति (ज्योत्पत्ति) का २१ वटा प्रक्रममा १६ वटा चित्र हाली १५ वटा प्रश्नमाला दिई ४५$\frac{१}{३}$ वटा पृष्ठ लेखिए । यतिबाट सिद्धान्तशिरोमणिका ६ वटा श्लोकका व्याख्यान भए । ती ६ वटा श्लोकमध्ये २$\frac{१}{२}$ वटा श्लोकलाई माथि उद्धरण गरिसकिएको छ, तैपनि भास्करको ग्रन्थसन्दर्भ यथार्थरूपमा जिज्ञासुहरूको मनमा चढोस् भनी भास्करको ज्योत्पत्ति[१] जस्ताको तस्तै यहाँ उद्धरण गरी त्यसको अनुवाद तथा व्याख्या पनि दिइन्छ ।

## इदानीं गोलं विवक्षुर् आदौ ज्योत्पत्तिकथने कारणम् आह—

---

१. भास्करले सिद्धान्तशिरोमणिको गोलाध्यायको बीचमा र अन्त्यमा गरी दुइवटा ज्योत्पत्ति दिएका छन् । तिनमा योचाहिं पहिलो हो । सिद्धान्तशिरोमणिको गणिताध्यायको स्पष्टाधिकारमा पनि ज्योत्पत्तिका केही कुरा परेका छन् । सिद्धान्तशिरोमणिमा रहेका ज्योत्पत्तिका बाँकी भागलाई पछि प्रसङ्ग मिलाई उद्धरण गरी तिनको अनुवाद तथा व्याख्यान पनि गरिनेछ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

पटो यथा तन्तुभिरूर्ध्वतिर्यग्
रूपैर् निबद्धोऽत्र तथैव गोलः ।
दोःकोटिजीवाभिरमुं प्रवक्तुं
ज्योत्पत्तिमेव प्रथमं प्रवक्ष्ये ॥१॥

[अब गोल बताउने इच्छा हुंदा पहिले ज्योत्पत्ति बताउनुपरेको कारण भनिन्छ । ठाडा र तेर्सा धागा (तान र बान) ले जसरी कपडा बनेको हुन्छ, त्यसै गरी ज्या र कोटिज्याले गोल बनेको हुन्छ । गोलको कुरा बताउन ज्योत्पत्ति नै पहिले भन्छु (१) ]

इदानीं जीवाक्षेत्रसंस्थानं तावद् आह–

इष्टा त्रिज्या सा श्रुतिर् दोर् भुजज्या
कोटिज्या तद्वर्गविश्लेषमूलम् ।
दोःकोट्यंशानां क्रमज्ये पृथक् ते
त्रिज्याशुद्धे कोटिदोरुत्क्रमज्ये ॥२॥

ज्याचापमध्ये खलु बाणरूपा
स्याद् उत्क्रमज्या त्रिभमौर्विकायाः ।
वर्गार्धमूलं शरवेद४५भाग-
जीवा ततः कोटिगुणोऽपि तावान् ॥३॥

त्रिभज्यकाऽर्धं खगुणां३०शजीवा
तत्कोटिजीवा खरसां६०शकानाम् ।
क्रमोत्क्रमज्याकृतियोगमूलाद्
दलं तदर्धांऽशकशिञ्जिनी स्यात् ॥४॥

त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर् दलस्य
मूलं तदर्धांऽशकशिञ्जिनी वा ।
तस्याः पुनस् तद्दलभागकानां
कोटेश् च कोट्यंशदलस्य चैवम् ॥५॥

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

एवं त्रि३षट्६सूर्य१२जिना२४दिसंख्या
अभीष्टजीवाः सुधिया विधेयाः ।
त्रिज्योत्थवृत्ते भगणाऽङ्किते वा
ग्राह्या अभीष्टा विगणय्य जीवाः ।।६।।

[अब ज्याक्षेत्रको संस्थान वताइन्छ—

इष्ट (इच्छालागे जति) त्रिज्या मान्नू, सो कर्ण हुन्छ । ज्या भुज हुन्छ । ती दुइको वर्गान्तरको मूल कोटिज्या हुन्छ । भुजांश (इष्ट अंश) र कोट्यंशका ज्या यी हुन् ।[१]

ज्यालाई त्रिज्याबाट घटाउँदा कोटयुत्क्रमज्या आउँछ । कोटिज्यालाई त्रिज्याबाट घटाउँदा उत्क्रमज्या आउँछ (२) । ज्या र चापको बीचमा बाण जस्तो भई उत्क्रमज्या रहेको हुन्छ ।

त्रिज्याको वर्गको आधाको मूल ४५ अंशको ज्या हुन्छ । ४५ अंशको कोटिज्या पनि त्यति नै हुन्छ (३) ।

त्रिज्याको आधा ३० अंशको ज्या हुन्छ । ३० अंशको कोटिज्याचाहिं ६० अंशको ज्या हुन्छ ।

इष्ट अंशको ज्या र उत्क्रमज्याको वर्गयोगको मूलको आधा गर्नू, इष्ट अंशको आधाको ज्या हुन्छ (४) ।

अथवा इष्ट अंशको उत्क्रमज्या र त्रिज्याको गुणनफलको आधाको मूल गर्नू, इष्ट अंशको आधाको ज्या हुन्छ ।

आधा अंशको ज्याबाट यही रीतले आधा अंशको पनि आधाको ज्या ल्याउनू । कोटिबाट कोटयंशको आधाको ज्या पनि यसै गरी ल्याउनू (५) ।

यसरी ३ वटा, ६ वटा, १२ वटा २४ वटा इत्यादि जति इच्छा लाग्छ, उतिवटा ज्या बुद्धिमान्ले ल्याउनू ।

इष्ट त्रिज्याले बनाएको वृत्तको परिधिमा ३६० अंशको चिनु लाई इष्ट अंशको ज्यालाई नापेर ल्याए पनि हुन्छ (६) ।]

यहाँ दोस्रो श्लोकको पूर्वार्धमा ज्या, कोटिज्या, त्रिज्याको संस्थान तथा गणित

---

१. प्राचीन ग्रन्थमा ज्यालाई भुजज्या, बाहुज्या, दोर्ज्या, भुजक्रमज्या (भु), क्रमज्या, अर्धज्या, ज्यार्ध, ज्या इत्यादि शब्दले र कोटिज्यालाई कोटिक्रमज्या, कोटिज्या (को), शब्दले प्रायः व्यवहार गरिएको छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

देखाइएको छ। यो कुरो ३ प्रक्रममा परेको छ। दोस्रो श्लोकको उत्तरार्ध र तेस्रो श्लोकको पूर्वार्धको केही भागमा उत्क्रमज्या र कोटघुत्क्रमज्याको संस्थान तथा गणित देखाइएको छ। यो कुरो ५ र १५ प्रक्रममा परेको छ। तेस्रो श्लोकको पूर्वार्धको बाँकी भाग र उत्तरार्धमा गरी ४५ अंशका ज्या–कोटिज्या ल्याइएका छन्। यो कुरो १०–१२ प्रक्रममा परेको छ। चारौं श्लोकको पूर्वार्धमा ३० अंश र ६० अंशका ज्या ल्याइएका छन्। यो कुरो १० र १९ प्रक्रममा परेको छ। चारौं श्लोकको उत्तरार्धमा इष्ट अंशको ज्या र उत्क्रमज्या थाहा पाई इष्ट अंशको आधाको ज्या ल्याउने रीति दिइएको छ। यो कुरो १७ प्रक्रममा परेको छ। पाचौं श्लोकको पूर्वार्धमा इष्ट अंशको उत्क्रमज्या र त्रिज्या थाहा पाई इष्ट अंशको आधाको ज्या ल्याउने रीति दिइएको छ। यो कुरो १८ प्रक्रममा देखाइएको छ। पाँचौं श्लोकको उत्तरार्धमा इष्ट अंशको आधाको पनि आधाको ज्या ल्याउने कुरा बताइएको छ। यसको उदाहरण १४ प्रश्नमालामा देखाइएको छ। छैटौं श्लोकको पूर्वार्धमा ३ वटा (३०, ६० र ९० अंशका) ज्या, ६ वटा (१५, ३०, ४५, ६०, ७५ र ९० अंशका) ज्या, १२ वटा (७$\frac{१}{२}$, १५, २२$\frac{१}{२}$, ३०, ३७$\frac{१}{२}$, ४५, ५२$\frac{१}{२}$, ६०, ६७$\frac{१}{२}$, ७५, ८२$\frac{१}{२}$, ९० अंशका) ज्या, २४ वटा (३$\frac{३}{४}$, ७$\frac{१}{२}$, ११$\frac{१}{४}$, १५, १८$\frac{३}{४}$, २२$\frac{१}{२}$ २६$\frac{१}{४}$, ३०, ३३$\frac{३}{४}$, ३७$\frac{१}{२}$, ४१$\frac{१}{४}$, ४५, ४८$\frac{३}{४}$, ५२$\frac{१}{२}$, ५६$\frac{१}{४}$, ६०, ६३$\frac{३}{४}$, ६७$\frac{१}{२}$ ७१$\frac{१}{४}$, ७५, ७८$\frac{३}{४}$, ८२$\frac{१}{२}$, ८६$\frac{१}{४}$ र ९० अंशका) ज्या ल्याउने रीति बताइएको छ। तिनमध्ये १० र १९ प्रक्रममा ३ वटा ज्या, १९ प्रक्रममा ६ वटा ज्या ल्याइएका छन्। यसको विशेष चर्चा २०–२१ प्रक्रममा गरिएको छ। १२ वटा ज्या ल्याउने रीति १३ र १४ प्रश्नमालामा परेका छन्। २४ वटा ज्या ल्याउने विधि पछि आउँदैछ।

छैटौं श्लोकको उत्तरार्धमा नापी नापी ज्या ल्याउने विधि दिइएको छ। द्विगुणित इष्ट अंशको पूर्णज्याको आधा इष्ट अंशको ज्या हुने हुनाले सो पूर्णज्यालाई नापी ज्या ल्याउनू भन्ने यसको अर्थ हो। यो कुरो १० प्रक्रममा परेको छ। यसको सुन्दर व्याख्या भास्करले आफैं गरेका छन्।

भास्करले आफ्नो ग्रन्थको व्याख्या आफैंले लेखेका छन्। माथि उद्धरण गरिएका उनका श्लोकको उनको व्याख्या यस प्रकारको छ—

अत्र त्रिज्योत्थवृत्ते भगणाऽङ्किते वेत्येतदन्त्यवृत्तस्योत्तरार्धम् आदौ व्याख्यायते। ज्योत्पत्तावभीष्टा त्रिज्या कल्प्यते। समायां भूमौ त्रिज्यामिताऽङ्गुलेन सूत्रेण वृत्तं विलिख्य दिगङ्कितं चक्रांऽशकैश् चाऽङ्कितं कृत्वा तत्रैकस्मिन्नेकस्मिन् वृत्त-

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

चतुर्थांऽशे नवतिर् नवतिर् भागा भवन्ति । ततो यावन्ति ज्यार्धानि कार्याणि तावद्भिर् विभागैर् एकैकं वृत्तचतुर्थांऽशं विभज्य तत्र चिह्नानि कार्याणि । तद् यथा यत्र चतुर्विंशतिर् जीवाः साध्यास् तत्र चतुर्विंशतिर् भवन्ति । एवं द्वितीयचतुर्थांऽशेऽपि । ततो दिक्-चिह्नाद् उभयतश् चिह्नद्वयोपरि गतं सूत्रं ज्यारूपं भवति । एवं चतुर्विंशतिर् ज्या भवन्ति । तासाम् अर्धानि ज्यार्धानि । तत्प्र-माणान्यङ्गुलैर् मित्वा ग्राह्याणि ।

अथाऽदितो व्याख्यायते । येष्टा त्रिज्या स कर्णः कल्प्यः । या भुजज्या स भुजस् तयोः कर्णभुजयोर् वर्गाऽन्तरपदं कोटिः । कोटिज्येत्यर्थः । तत्र ये भुजकोटिज्ये ते भुजकोटघं-शानां क्रमज्ये ज्ञातव्ये । भुजज्या त्रिज्यातो यावद् विशोध्यते तावत् कोटघंशानाम् उत्क्रमज्याऽवशिष्यते । एवं कोटिज्योना त्रिज्या भुजांऽशानाम् उत्क्रमज्या स्यात् ।

अथोत्क्रमज्यास्थानं दर्शयति । तत्र पूर्वलिखिते वृत्ते चिह्नयोर् उपरि गतं सूत्रं किल ज्या । तदुपरि तयोश् चिह्नयोर् मध्ये यद् वृत्तखण्डं तच्चापं धनुः । चापमध्यस्य ज्यामध्यस्य च यद् अन्तरं बाणाऽकारं, सोत्क्रमज्येत्युच्यते । त्रिभमौर्विकाया इत्यग्रे सम्बन्धः ।

एवं साधारण्येन ज्याक्षेत्रं दर्शयित्वाऽथ निर्दिष्टांऽशानां गणितेन ज्याऽऽनयनम् । त्रिभमौर्विकाया यद् वर्गाऽर्धस्य मूलं सा पञ्चचत्वारिंशद्४५अंशानां ज्या स्यात् । तस्या यावत् कोटिज्या साध्यते तावत् तावत्येव भवति । यतस् तत्र कोटघंशा अपि पञ्चचत्वारिंशत्४५ ।

अत्रोपपत्तिः। त्रिज्या भुजस् त्रिज्या च कोटिस् तद्वर्ग-योगपदं वृत्ताऽन्तःसमचतुरस्रस्य भुजः स्यात् । सैव नवति९०-भागानां ज्या । तदर्धं ग्राह्यम् । अतो वर्गयोगस्य चतुर्थांऽशः

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

कृतः । तदेव त्रिज्यावर्गाऽर्धम् अतस् तन्मूलं शरवेद४५भागज्ये-त्युपपन्नम् ।

अथ त्रिंशद्३०भागानां ज्या त्रिज्यार्धमिता स्यात् । तस्याः कोटिज्या षष्टि६०भागानां ज्या स्यात् ।

अत्रोपपत्तिः । वृत्ताऽन्तःपातिसमषडस्रस्य भुजो व्यासार्धमितः स्याद् इति प्रसिद्धं गणितेऽपि कथितम् । अतस् त्रिज्यार्धं त्रिंशद्३०भागज्येत्युपपन्नम् ।

अतः प्राग्वद् उत्क्रमज्या । षष्टि६०भागज्ययोना त्रिज्या राशेर् उत्क्रमज्या । सा कोटिरूपिणी । क्रमज्या भुजरूपिणी । तदग्रयोर् निबद्धसूत्रं तत् कर्णः । तत् त्रिंशद्३०भागानां ज्यारूपम् । अतस् तदर्धं पञ्चदश१५भागानां ज्यार्धम् इत्युपपन्नम् । एवं सर्वत्र तदर्धांऽशकशिञ्जिनीनाम् उपपत्तिर् ज्ञेया ।

अथ प्रकारान्तरेण तदर्धांऽशकशिञ्जिनीम् आह । त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर् इत्यादि ।

अस्योपपत्तिः । तत्राऽद्याऽक्षरचिह्नैर् बीजप्रकारेण कथ्यते । तत्रोत्क्रमज्योना त्रिज्या किल कोटिज्या । तस्या वर्गोऽयम् । उव १ उत्रिभा २ं त्रिव १।* अनेनोना त्रिज्याकृतिर् दोर्ज्याकृतिः स्यात् । उव १ं उत्रिभा २ । अयं क्रमज्यावर्ग उत्क्रमज्यावर्गयुतो जातः । उत्रिभा २ । अस्य चतुर्थभागः । उत्रिभा $\frac{१}{२}$ । अस्य मूलं ग्राह्यम् । अत उक्तं त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर् इत्यादि । एवं तस्या अप्यन्या तदर्धांऽशकशिञ्जिनीति । एवं कोटिज्याया अपि यावदभिमतखण्डानि स्युः ।

तद् यथा । यत्र चतुर्विंशतिः २४ खण्डानि तत्र राशेर्

---

* "उव १ उत्रिभा २ं त्रिव १" को अर्थ "उत्क्रमज्या$^{२}$–२ उत्क्रमज्या. त्रि + त्रि$^{२}$" हो ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

ज्याऽाष्टमं ८ खण्डस् । तत्कोटिज्या षोडशम् १६ । शरवेद४५-भागज्या द्वादशम् १२ । अस्मात् खण्डत्रयात् कथितप्रकारेण चतुर्विंशतिः२४ खण्डान्युत्पद्यन्ते । तत्राऽष्टमात्८ तदर्धांऽशक-शिञ्जिनी चतुर्थम् ४ । तत्कोटिज्या विंशम् २० । एवं चतुर्थाद्४ द्वितीयम् २ । द्वाविंशं २२ च । द्वितीयात् २ प्रथमम् १ । त्रयो-विंशं २३ च । एवं दशमचतुर्दशपञ्चमैकोनविंशसप्तमसप्तदशै-कादशत्रयोदशानीत्यष्टमात् १०।१४।५।१९।७।१७।११।१३ अथ द्वादशात्१२ षष्ठाऽष्टादशतृतीयैकविंशनवमपञ्चदशानि ६। १८।३।२१।९।१५ त्रिज्या चतुर्विंशम् २४ इति । अतोऽवशिष्टां ज्योत्पत्तिम् अग्रे वक्ष्यामः ।

[छैटौं श्लोकको उत्तरार्धको व्याख्या पहिले गरिन्छ । ज्योत्पत्तिमा आफूलाई मनलागे जति त्रिज्या मान्ने चलन छ । सम्म मिलेको जगामा आफ्नो त्रिज्या जति छ, उति अंगुलको धागोलाई घुमाई वृत्त बनाउनू । त्यस वृत्तमा दिशा छुट्टयाउनू र ३६० अंशले त्यस वृत्तको परिधिमा चिनु लाउनू । त्यहाँ वृत्तको हरेक चौथाई (पाद) मा ९०।९० अंश हुन्छन् । अनि जतिवटा ज्या ल्याउनुपरेको छ, प्रत्येक पादको त्यति नै भाग लाई चिनो लाउनू । जस्तै २४ वटा ज्या ल्याउनु-परेको भए पहिलो पादको २४ भाग लाई चिनु लाउनू । यसै गरी अर्को पादमा (चौथो पादमा) पनि २४ भाग लाई चिनु लाउनू । अनि दिक्चिह्न(पूर्वपदादि)-बाट दुवैतिरका बराबर भागका दुइवटा चिह्नमा जाने रेखा हाल्नू । सो रेखा पूर्णज्या हुन्छ । यसरी २४ वटा पूर्णज्या आउँछन् । ती पूर्णज्याका आधा ज्या हुन्छन् । तिनलाई अंगुलले नापी तिनको मान ल्याउनू ।

अब माथिदेखि व्याख्या गरिन्छ । जति इष्ट त्रिज्या हुन्छ, त्यसलाई कर्ण मान्नू । जुन ज्या हुन्छ, त्यो भुज भएर रहेको हुन्छ । कर्ण र भुजको वर्गान्तरको मूल कोटि (कोटिज्या) हुन्छ । यहाँ जुन ज्या–कोटिज्या आउँछन्, ती भुजांश (इष्ट चाप) र कोटयंशका ज्या हुन् । ज्यालाई त्रिज्याबाट घटाइदियो भने कोटयंशको उत्क्रमज्या (कोट्युत्क्रमज्या) आउँछ । कोटिज्यालाई त्रिज्याबाट घटाइदियो भने भुजांशको उत्क्रमज्या हुन्छ ।

अब उत्क्रमज्याको स्थान देखाइन्छ । अघि लेखिएको वृत्तमा दुइवटा चिह्नमा गएको जुन रेखा (पूर्णज्या) छ, सो दुरुस्त ज्या (ताँदो) जस्तो छ । त्यसको

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

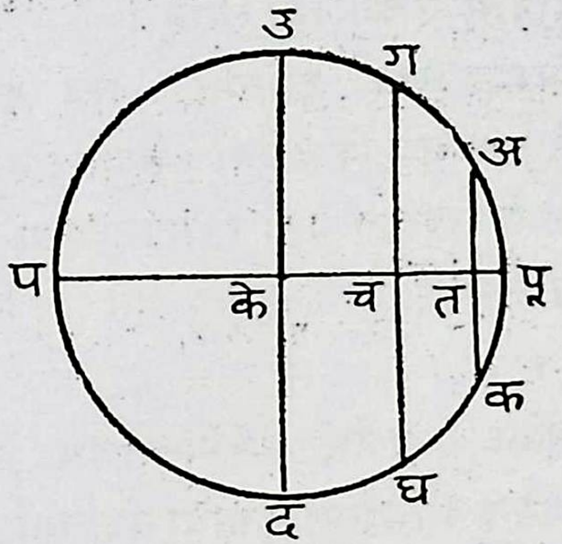
माथितिर ती दुइ चिह्नमा जाने परिधिको टुक्रो चाप जो छ, त्यो ठीक धनु जस्तो छ। चापको बीच र पूर्णज्याको वीच बाण जस्तो भएर रहेको टुक्रो उत्क्रमज्या भनिन्छ।‡

यसरी साधारणरूपले ज्याक्षेत्रलाई देखाइयो। अब इष्ट अंशको ज्या गणितद्वारा ल्याइन्छ। त्रिज्यावर्गको आधाको मूल ४५ अंशको ज्या हुन्छ। ४५ अंशको कोटिज्या ल्यायो भने पनि त्यति नै हुन्छ किनभने त्यहाँ कोटचंश पनि ४५ अंश नै हुन्छन्।

यसको उपपत्ति— त्रिज्या भुज, त्रिज्या कोटि, तिनको वर्गयोगको मूल जो हुन्छ, सो वृत्तभित्र बनेको वर्गक्षेत्रको भुज हुन्छ। ९० अंशको पूर्णज्या त्यही हुन्छ

---

‡ यस १७ चित्रमा पूर्वपदादि बिन्दु पू बाट प्रथम पदमा पू अ ३० अंशको चाप नापी अ चिनु लाइएको छ। यसै गरी पू बिन्दुबाट चतुर्थ पदमा पू क ३० अंश नापी क चिनु लाइएको छ। यसकारण क पू अ चाप ६० अंशको बनेको छ। सो क पू अ चापको पूर्णज्या अ क हो। सो अ क को आधा अ त छ।




[ १७ चित्र ]

सो अ त रेखा पू अ ३० अंशको ज्या हो। सो अ त रेखा नापी हेर्दा ट्वाक्क त्रिज्याको आधा हुन्छ। यस कारण ३० अंशको ज्या त्रिज्याको आधा हुन्छ भन्ने देखिन आउँछ। यसै गरी ग च रेखा ६० अंशको ज्या हुन्छ। उ के चाहिं ९० अंशको ज्या हुन्छ। तीनवटा ज्या भनेका अ त, ग च, उ के यी हुन्।

यस चित्रमा क पू अ चाप धनु, अ क पूर्णज्या ताँदो, त पू उत्क्रमज्या बाण बनेको स्पष्ट देखिन्छ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(१० चित्र)। त्यस पूर्णज्याको आधा लिनुपरेको छ । यस कारण वर्गयोगलाई ४ ले भाग लिएको हो । त्रिज्याको वर्गको आधा त्यही हुन्छ । यस कारण त्रिज्यावर्गको आधाको मूल ४५ अंशको ज्या हुन्छ भनिएको हो ।

अब ३० अंशको ज्या ल्याइन्छ । त्रिज्याको आधा ३० अंशको ज्या हुन्छ । ३० अंशको कोटिज्या ६० अंशको ज्या हुन्छ ।

यसको उपत्ति— वृत्तान्तर्गतसमषड्भुजको भुज त्रिज्यातुल्य हुन्छ भन्ने कुरा प्रसिद्ध छ (९ चित्र) । यो कुरो मैले व्यक्तगणितमा (लीलावती क्षेत्रव्यवहार ४५–४७ श्लोकमा) पनि भनेको छु । यस कारण त्रिज्याको आधा ३० अंशको ज्या हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ ।

यताबाट अघि जस्तै गरी (कोटिज्या ल्याई त्यसलाई त्रिज्याबाट घटाई) उत्क्रमज्या ल्याउनू । ६० अंशको ज्यालाई त्रिज्याबाट घटाइदियो भने ३० अंशको उत्क्रमज्या आउँछ । उत्क्रमज्या कोटि भएर रहेको हुन्छ । ज्या भुज भएर रहेको हुन्छ । उत्क्रमज्या र ज्याको टुप्पोमा जाने रेखा कर्ण हुन्छ (७ तथा १५ चित्र) यहाँ त्यो कर्ण नै ३० अंशको पूर्णज्या हुन्छ । यस कारण त्यसको आधा १५ अंशको ज्या हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ (१० प्रक्रम) । यसरी सबै ठाउँमा इष्ट अंशको आधाको ज्या ल्याउने रीतिको उपपत्ति बुझ्नुपर्छ ।

अब अर्को रीतिबाट इष्ट अंशको आधाको ज्या ल्याउने रीति बताइन्छ । उत्क्रमज्या र त्रिज्याको गुणनफलको आधाको मूल गर्नू, इष्ट अंशको आधाको ज्या हुन्छ ।

यसको उपपत्ति बीजगणितबाट गरिन्छ ।

$$\text{कोटिज्या} = \text{त्रि} - \text{उत्क्रमज्या}$$

$$\therefore \text{कोटिज्या}^{2} = \text{त्रि}^{2} - 2\,\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या} + \text{उत्क्रमज्या}^{2}$$

$$\text{ज्या}^{2} = \text{त्रि}^{2} - \text{कोटिज्या}^{2}$$

$$= \text{त्रि}^{2} - (\text{त्रि}^{2} - 2\,\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या} + \text{उत्क्रमज्या}^{2})$$

$$= 2\,\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या} - \text{उत्क्रमज्या}^{2}$$

$$\therefore \text{ज्या}^{2} + \text{उत्क्रमज्या}^{2} = 2\,\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या} - \text{उत्क्रमज्या}^{2} + \text{उत्क्रमज्या}^{2}$$

$$= 2\,\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या}$$

$$\therefore \frac{\text{ज्या}^{2} + \text{उत्क्रमज्या}^{2}}{4} = \frac{2\,\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या}}{4} = \frac{\text{त्रि}.\,\text{उत्क्रमज्या}}{2}\dagger$$

= इष्ट अंशको पूर्णज्याको आधाको वर्ग ।

---

† यद्वोत्क्रमज्यावियुता त्रिभज्या (उ १̇ त्रि १)
कोटिज्यका तत्कृति (उव १ उ. त्रि २̇ त्रिव १) वर्जिता च ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यस कारण इष्ट अंशको उत्क्रमज्या र त्रिज्याको गुणनफलको आधाको मूल इष्ट अंशको आधाको ज्या हुन्छ भनिएको हो ।

यसै गरी इष्ट अंशको आधाको पनि आधाको ज्या ल्याउनू । यसरी नै कोटिज्याबाट पनि इष्ट ज्याहरू आउँछन् ।

जस्तै— २४ वटा ज्या भए ३० अंशको ज्या आठौं (८) ज्या हुन्छ । ३० अंशको कोटिज्याचाहिं सोह्रौं (१६) ज्या हुन्छ । ४५ अंशको ज्या बाह्रौं (१२) ज्या हुन्छ । यी तीनवटा‡ ज्याबाट २४ वटा ज्या आउँछन् । आठौं ज्याबाट आधा

---

त्रिज्याकृतिः (उ व १ उ. त्रि २) सा क्रममौर्विकायाः
कृतिर् भवेद् उत्क्रममौर्विकायाः ।।
कृतौ युता सा (उ. त्रि २) द्विगुणोत्क्रमज्या
त्रिज्याहतिस् तत्पदखण्डसिद्धयै ।
तदर्द्धघ्रमूलं परिगृह्य पूर्व-
प्रकारसिद्धो गदितो द्वितीयः ।।
त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर् दलस्य
मूलस्वरूपाऽऽनयनप्रकारः ।

(सिद्धान्ततत्त्वविवेक स्पष्टाधिकार ७८ श्लोकको उपपत्ति)

[अथवा त्रिज्याबाट उत्क्रमज्या घटाइदियो भने कोटिज्या हुन्छ । त्रिज्याको वर्गबाट कोटिज्याको वर्ग घटायो भने ज्याको वर्ग हुन्छ । ज्याको वर्गमा उत्क्रमज्याको वर्ग जोड्यो भने त्रिज्या र उत्क्रमज्याको २ गुणित घात आउँछ । त्यसको मूलको आधा ल्याउनाका लागि त्यसको चौथाईको मूल गरिएको हो । यसरी अघिको दोस्रो प्रकारको 'त्रिज्योत्क्रमज्यानिहतेर् दलस्य ...' (७८ श्लोक) को उपपत्ति अर्को रीतिबाट हुन्छ ।]

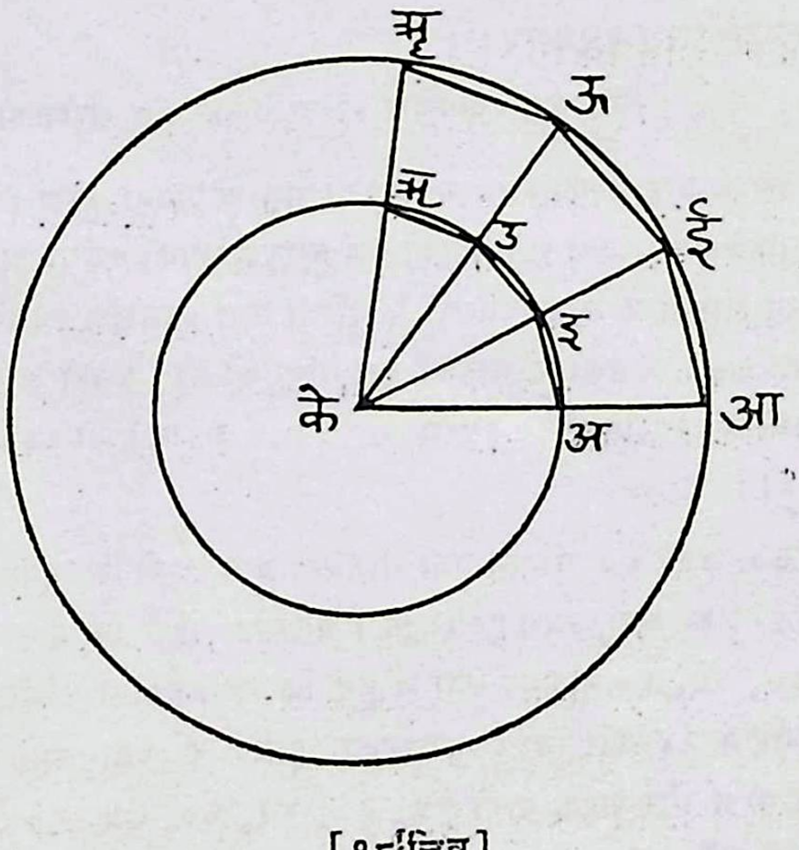
‡ यहाँ ३०, ४५, ६० अंशका ज्या तीनवटा ज्या भनी लिइएका छन् । यी तीनवटा ज्याबाट अरू ज्या ल्याइएका छन् । यसबाट छैटौं श्लोकमा भनिएका तीनवटा ज्या ३०, ४५, ६० अंशका ज्या नै हुन् कि भन्ने देखिन आउँछ । अन्तिम ज्या त्रिज्या लिएर नै २४ वटा ज्या पुऱ्याइको हुनाले र ब्रह्मगुप्तहरूले ६ वटा ज्या लिंदा पन्ध्र पन्ध्र अंश फरक पारी १५, ३०, ४५, ६०, ७५, ९० अंशका ज्या लिएका हुनाले पनि तीस तीस अंश फरक पारी ३०, ६०, ९० अंशका ज्या नै तीनवटा ज्या हुन् भन्ने अर्थ माथि ६ श्लोकमा गरिएको हो ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

अंशको ज्या ल्याउँदा चौथो (४) ज्या आउँछ। त्यसको कोटिज्याचाहिं बीसौं (२०) ज्या हुन्छ। यस्तै चौथो ज्याबाट दोस्रो (२) र बाइसौं (२२) ज्या आउँछन्। दोस्रोबाट पहिलो (१) र तेईसौं (२३) ज्या आउँछन्। यसै गरी आठौं ज्याबाट दशौं (१०), चौधौं (१४) पांचौं (५) उन्नाईसौं (१९), सातौं (७), सत्रौं (१७), एघारौं (११), तेह्रौं (१३), ज्या हुन्छन्। बाह्रौंबाट छैटौं (६), अठाह्रौं (१८), तेस्रो (३) एक्काईसौं (२१), नवौं (९), पन्ध्रौं (१५) ज्या हुन्छन्। त्रिज्याचाहिं चौबीसौं (२४) ज्या हुन्छ। बाँकी रहेका ज्योत्पत्ति पछि भन्नेछौं।]

## २२ प्रक्रम—

दुइवटा वृत्तभित्र रहेका समबहुभुजक्षेत्र [बराबरका (उत्रैउत्रै) उतिउति (उतिवटा नै) भुज भएका क्षेत्र] का सबै भुजको योगको निष्पत्ति र ती दुइ वृत्तका व्यासको निष्पत्ति बराबर हुन्छ।




[१८ चित्र]

के विन्दुलाई केन्द्र मानी के अ त्रिज्याले अ इ उ ऋ वृत्त बनाऊ। फेरि

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

के बिन्दुलाई नै केन्द्र मानी के आ त्रिज्याले आ ई ऊ ऋ वृत्त बनाऊ। केन्द्रमा बनेका आ के ई, ई के ऊ, ऊ के ऋ सबै कोण बराबर हुने गरी के आ, के ई, के ऊ, के ऋ त्रिज्या हाल। यी त्रिज्याले सानो वृत्तलाई क्रमैले अ, इ, उ, ऋ बिन्दुहरूमा काट्छन्। ठूलो वृत्तका आ, ई, बिन्दुमा जाने आ ई पूर्णज्या हाल। यसै गरी ई ऊ, ऊ ऋ, पूर्णज्या हाल। सानो वृत्तमा पनि अ इ, इ उ, उ ऋ, पूर्णज्या हाल। आ के ई तथा अ के इ दुवै समद्विबाहु त्रिभुज हुन्। यिनको शीर्ष बिन्दुको आ के ई कोण उभयनिष्ठ छ। यस कारण यी दुवै त्रिभुज समानकोणक हुन्छन्। [रेखागणित १ अ. ५ प्र., १ अ. ३२ प्र.]

यस कारण $\frac{\text{अ इ}}{\text{आ ई}} = \frac{\text{के अ}}{\text{के आ}}$ [रेखागणित ६ अ. ४ प्र.]

अ इ चापको पूर्णज्या अ इ रेखा छ। आ ई चापको पूर्णज्या आ ई रेखा छ।

यस कारण $\frac{\text{सानो वृत्तको पूर्णज्या}}{\text{ठूलो वृत्तको पूर्णज्या}} = \frac{\text{सानो वृत्तको त्रिज्या}}{\text{ठूलो वृत्तको त्रिज्या}}$

यसै गरी ई के ऊ, इ के उ त्रिभुजमा पनि

$\frac{\text{सानो वृत्तको पूर्णज्या}}{\text{ठूलो वृत्तको पूर्णज्या}} = \frac{\text{सानो वृत्तको त्रिज्या}}{\text{ठूलो वृत्तको त्रिज्या}}$

आ के ई कोण र ई के ऊ कोण बराबर गरी बनाइएका हुनाले आ ई पूर्णज्या = ई ऊ पूर्णज्या, अ इ पूर्णज्या = इ उ पूर्णज्या हुन्छन्।

[रेखागणित ३ अ. २८ प्र.]

यदि वृत्तको परिधिको बराबर भाग लाई पूर्णज्या हाली १८ चित्र जस्तै क्षेत्र बनायो भने जुनसुकै पूर्णज्याबाट पनि माथिको रूप सिद्ध गर्न सकिन्छ।

आ के ई कोण २७ अंश चानचुनको छ। यस कारण आ के ई जस्ता कोण वृत्तको केन्द्रमा १३ वटा बन्दछन्। बराबर भएका पूर्णज्या १३ वटा बन्ने हुनाले ठूलो सानो दुवै वृत्तभित्र समत्रयोदशभुज क्षेत्र (बराबर १३ वटा भुज भएको क्षेत्र) बन्दछ।

१३ वटा समद्विबाहु त्रिभुजका आधार भएका १३ वटै पूर्णज्या बराबर छन्। ती १३ त्रिभुजका आधारको योगबाट समत्रयोदशभुज क्षेत्रको भुजको योग बनेको छ।

$\frac{\text{सानो वृत्तको पूर्णज्या}}{\text{ठूलो वृत्तको पूर्णज्या}} = \frac{\text{सानो वृत्तको त्रिज्या}}{\text{ठूलो वृत्तको त्रिज्या}}$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यस समीकरणको बायाँ पक्षका हर तथा अंश दुवैलाई १३ ले, दायाँ पक्षका हर तथा अंश दुवैलाई २ ले भुन्दा—

$$\frac{\text{१३ सानो वृत्तको पूर्णज्या}}{\text{१३ ठूलो वृत्तको पूर्णज्या}} = \frac{\text{२ सानो वृत्तको त्रिज्या}}{\text{२ ठूलो वृत्तको त्रिज्या}}$$

वा $$\frac{\text{सानो वृत्तभित्र बनेको समत्रयोदशभुज क्षेत्रका सबै भुजको योग}}{\text{ठूलो वृत्तभित्र बनेको समत्रयोदशभुज क्षेत्रका सबै भुजको योग}} = \frac{\text{सानो वृत्तको व्यास}}{\text{ठूलो वृत्तको व्यास}}$$ हुन्छ ।

यताबाट दुइवटा वृत्तभित्र बनेका समबहुभुजका भुजयोगको निष्पत्ति र ती दुइ वृत्तका व्यासको निष्पत्ति बराबर हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ ।

क्षेत्रद्वय्या वृत्तयुग्मे वसन्त्यास्
तुल्यान् बाहूँस् तुल्यसंख्यान् दधत्याः ।
यः सम्बन्धो व्यासयोः स्यात् स एव
सम्बन्धः स्यात् सर्वबाहूत्थयुत्योः ।।२४।।

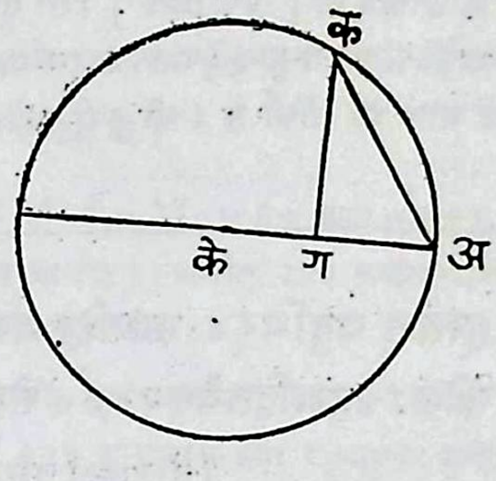
[दुइवटा वृत्तभित्र रहेका समबहुभुज क्षेत्र {बराबरका (उत्तैउत्तै) उति उति (उतिवटा नै) भुज भएका क्षेत्र} का सबै भुजका योगको जुन निष्पत्ति हुन्छ, ती वृत्तका व्यासको पनि त्यही निष्पत्ति हुन्छ ।]

## २३ प्रक्रम—

### ज्याभन्दा पूर्णज्या ठूलो, पूर्णज्याभन्दा चाप ठूलो हुन्छ ।

१९ चित्रमा अ क चापको अ क सरलरेखा पूर्णज्या, क ग रेखा ज्या बनेको छ । अ क ग जात्यत्रिभुज भएकोले क ग भुजभन्दा अ क कर्ण ठूलो हुन्छ । यस कारण ज्याभन्दा पूर्णज्या ठूलो हुन्छ भन्ने कुरो स्पष्ट छ । अ, क बिन्दुमा जाने अ क पूर्णज्या र अ क चापमा पूर्णज्या सरलरेखा र चाप वक्ररेखा बनेको छ । यस कारण पूर्णज्याभन्दा चाप ठूलो हुन्छ भन्ने कुरो पनि स्पष्ट छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[१९ चित्र]

यतिबाट ज्याभन्दा पूर्णज्या ठूलो, पूर्णज्याभन्दा चाप ठूलो हुन्छ भन्ने कुरो सिद्ध हुन आउँछ।

जीवायाः स्याज् ज्यायसी पूर्णजीवा
पूर्णज्यायाश् चापमानं महीयः।
ज्यापूर्णज्याकार्मुकाण्यङ्गुलाऽद्यैः
सम्यङ् मित्वा सूत्रमेतत् परीक्ष्यम् ॥२५॥

[ज्याभन्दा पूर्णज्या ठूलो, पूर्णज्याभन्दा चाप ठूलो हुन्छ। ज्या, पूर्णज्या र चापलाई अंगुलादि कुनै एउटै नापोले नापेर यो कुरोको परीक्षा गर्न सकिन्छ।]

२४ प्रक्रम—

जति जति चाप सानो हुन्छ, उति उति ज्या र चापको अन्तर पनि सानो हुँदै जान्छ र चाप ज्यादै सानो भएमा ज्या र चापको अन्तर थाहा नपाइने हुन्छ।

७ अंगुल (=७×८ जौ=५६ जौ)‡ व्यास भएको वृत्तको एक पाद

---

‡ यवोदरैर् अङ्गुलमष्टसंख्यैर्
हस्तोऽङ्गुलैः षड्गुणितैश् चतुर्भिः।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(चौथाई) यो पू के उ क्षेत्र हो [ २१ चित्र ] । सो वृत्तको पूरा परिधि २२ अंगुल =२२ × ८ जौ = १७६ जौको हुन्छ । यस कारण यहाँ रहेको पू देखि उ सम्मको परिधिको चौथाई भाग ४४ जौको छ । यो कुरो नापेर हेर्न सकिन्छ ।

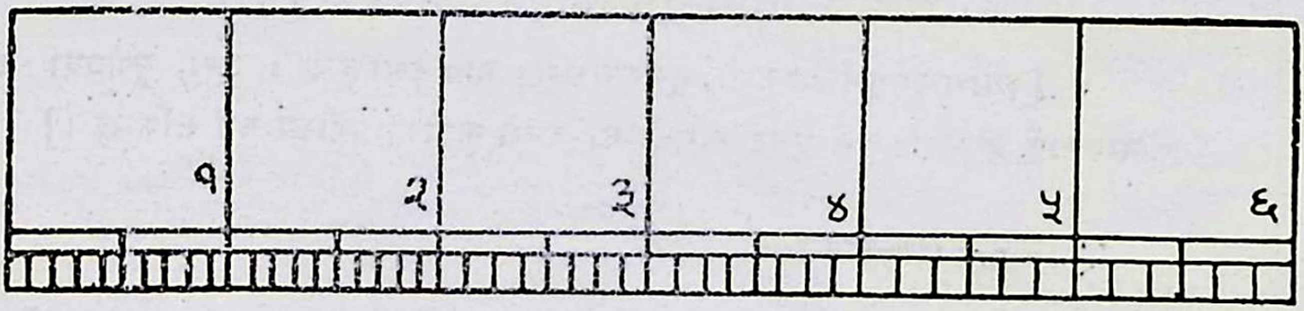
---

हस्तैश् चतुर्भिर्४ भवतीह दण्डः
क्रोशः सहस्त्रद्वितयेन२००० तेषाम् ।।

(लीलावती परिभाषा ५ श्लोक)

[पेट मिलाएका ८ जौ = १ अंगुल । २४ अंगुल = १ हात । ४ हात = १ दण्ड । २००० दण्ड = १ कोश ।]

जौ अंगुलको नापोको 'प्रमाणशलाका' यो हो । यो ६ अंगुलको छ । यसमा पहिलो दोस्रो २ अंगुललाई १०/१० भागमा अर्थात् ·१ अंगुलमा, तेस्रो चौथो २

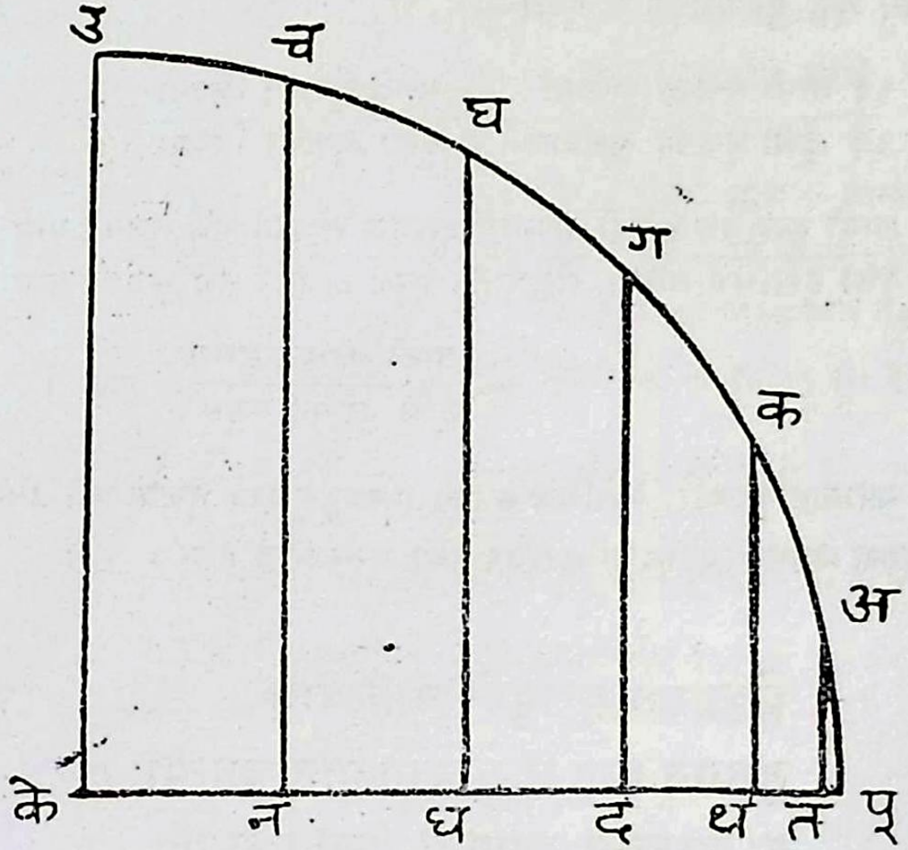



[ २० चित्र ]

अंगुललाई ८/८ भागमा अर्थात् १/१ जौमा, पाँचौं छैटौं २ अंगुललाई ६/६ भागमा अर्थात् $\frac{1}{6}$ अंगुलमा बाँडिएको छ ।

वि. सं. २००० तिर पं. श्रीनाथ पाँडे शास्त्रीले यो प्रमाणशलाका बनाउनुभएको थियो । यसमा अलिकता संशोधन गरी नानी मङ्गलदास प्रधानाङ्गले वि. सं. २०२१ मा यो बनाएका हुन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ २१ चित्र ]

परिधिको १ अंश चापमा $\frac{१७६}{३६०} = \frac{२२}{४५}$ जौ हुन्छ ।

$\therefore$ पू उ ९०° चापमा $\frac{२२}{४५} \times ९० = ४४$ जौ

पू च ७५° चापमा $\frac{२२}{४५} \times ७५ = \frac{११०}{३} = ३६{\cdot}६६७$ जौ

पू घ ६०° चापमा $\frac{२२}{४५} \times ६० = \frac{८८}{३} = २९{\cdot}३३३$ जौ

पू ग ४५° चापमा $\frac{२२}{४५} \times ४५ = २२$ जौ

पू क ३०° चापमा $\frac{२२}{४५} \times ३० = \frac{४४}{३} = १४{\cdot}६६७$ जौ

पू अ १५° चापमा $\frac{२२}{४५} \times १५ = \frac{२२}{३} = ७{\cdot}३३३$ जौ

यस वृत्तको त्रिज्या $\frac{७}{२}$ अंगुल $= \frac{७}{२} \times ८$ जौ $= २८$ जौ हुन्छ । त्रिज्या २८ जौ भएकोले पू उ ९०° चापको उ के ज्या २८ जौ हुन्छ ।

यस कारण पू उ चाप− उ के ज्या $= ४४ - २८ = १६$ हुन्छ ।

यस कारण ९० अंशमा ज्या र चापको अन्तर १६ जौ हुन्छ । त्यस्तै पू च ७५ अंश चापको च न ज्या २७·०४६ हुन्छ । यहाँ ज्या र चापको अन्तर ९·६२१ हुन्छ । यसरी १५/१५ अंश फरक पारी ९० अंशसम्मका ज्या, चाप र तिनका अन्तर तलको सारणीमा दिइएका छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ५ सारणी

| चापको अंश | १ (जौ) त्रिज्या भएमा ज्या † | २८ जौ त्रिज्या भएमा ज्या | २८ जौ त्रिज्या भएमा चापको जौमा मान | जौमा ज्या र चापको अन्तर |
|---|---|---|---|---|
| ९०° | १ | २८ | ४४ | १६ |
| ७५° | ·९६५९३ | २७·०४६ | ३६·६६७ | ९·६२१ |
| ६०° | ·८६६०३ | २४·२४९ | २९·३३३ | ५.०८४ |
| ४५° | ·७०७११ | १९·७९९ | २२ | २·२०१ |
| ३०° | ·५ | १४ | १४·६६७ | ·६६७ |
| १५° | ·२५८८२ | ७·२४७ | ७·३३३ | ·०८६ |

यो ५ सारणी हेर्नाले चाप जति जति घट्दै जान्छ, ज्या र चापको अन्तर पनि उति उति घट्दै जाँदो रहेछ भन्ने स्पष्ट देखिन आउँछ ।

पू श्र चाप १५ अंशको छ । यहाँ ज्या र चापको अन्तर '०८६ छ । सो अन्तर क्षेत्रमा पनि स्पष्ट देखिन्छ । चाप यसभन्दा पनि घट्दै गएमा सो अन्तर घट्दै जाने कुरो माथिको सारणीबाट स्पष्ट छ ।

नाङ्ला वा साइकलका पाङ्ग्राहरूका घेरा बाटुला देखिन्छन् । तर ती घेराका बराबर १०० टुक्रा पार्दा बनेको एक टुक्रो सोझो जस्तो देखिन्छ । यस कुरालाई परीक्षा गरी अनुभव गर्न सकिन्छ । यस कारण भास्करले

**समो यतः स्यात् परिधेः शतांं१००शः ।**

(गोलाध्याय भुवनकोश १३ श्लोक)

[परिधिको शय भागको एक भाग सोझो हुन्छ ।]

भनी बोलेका हुन् ।

परिधिको शय भागभन्दा अलिकति कम अर्थात् ९६ भाग गरे तापनि सो भाग सोझो जस्तो देखिन्छ भनी प्राचीन आचार्यहरुले अनुभव गरी सोही कुरो आपनो ग्रन्थमा लेखेका छन्–

† ३ सारणीबाट ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

वृत्तस्य षण्णवत्यं९६शो दण्डवत् परिदृश्यते ।

[परिधिको ९६ भागको १ भाग लट्ठी जस्तो सोझो देखिन्छ ।]

शाकल्यको यो उक्ति प्रसिद्ध छ ।

यताबाट $\frac{३६०}{९६}$ अं $= \frac{१५}{४}$ अं $= \frac{१५}{४} \times ६०$ कला $=$ २२५ कला सोझो जस्तो देखिन्छ भन्ने कुरा देखिन आउँछ । अर्थात् २२५ कलासम्मको ज्या र चापमा फरक देखन सकिँदैन भन्ने देखिन आउँछ ।

चापभन्दा पूर्णज्या सानो, पूर्णज्याभन्दा ज्या सानो हुन्छ भनी २३ प्रक्रममा सिद्ध गरिएको हो । यहाँ २२५ कलासम्म ज्या र चापमा अन्तर भेट्टाउन गाह्रो पर्ने देखिन आयो । यस कारण ज्या र चापको बीचमा परेको पूर्णज्यासँग ज्या र चापको अन्तर भेट्टाउन झन् गाह्रो पर्ने भयो । यस कारण २२५ कलासम्म ज्या, पूर्णज्या र चापको अन्तर थाहा पाइँदैन भन्ने कुरो स्पष्ट हुन्छ ।

यथा यथा ह्रासमुपैति चापस्
तथा तथा ज्याधनुषोर् विभेदः ।
प्रक्षीयते राशिगजांऽशतोऽल्पे
चापे न लक्ष्यो गुणचापभेदः ।।२६।।

[जति जति चाप घट्दै जान्छ । उति उति ज्या र चापको अन्तर पनि घट्दै जान्छ । एक राशिको आठ भागको एक भाग (२२५ कला) भन्दा सानो चाप भएमा ज्या र चापको भेद थाहा पाउन सकिँदैन ।]

## २५ प्रक्रम—

### व्यास र परिधिको सम्बन्ध

दुइवटा वृत्तभित्र रहेका समबहुभुज क्षेत्रका सबै भुजको योगको निष्पत्ति र ती दुइ वृत्तका व्यासको निष्पत्ति बराबर हुन्छ भन्ने कुरो २२ प्रक्रममा सिद्ध गरिएको छ ।

२२५ कलाभन्दा कम चाप भएमा पूर्णज्या र चापको अन्तर देखन सकिँदैन भन्ने कुरो २४ प्रक्रममा देखाइएको छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यी दुइ सिद्धान्तलाई आधार मानी अब हामी व्यास र परिधिको सम्बन्धमा विचार गरौँ ।

वृत्तान्तर्गत समबहुभुज क्षेत्रका भुज सो वृत्तका पूर्णज्या हुन्छन् भन्ने कुरो १८ चित्रबाट स्पष्ट छ । चाप सानो भएमा पूर्णज्या र चाप एकैनास हुने हुनाले अत्यन्त धेरै भुज भएको वृत्तान्तर्गत समबहुभुज क्षेत्रका सबै भुजको योग अर्थात् सबै पूर्णज्याको योग सबै चापको योगको बराबर हुन आउने देखिन्छ । सबै चापको योग भनेको परिधि हो यस कारण अत्यन्त धेरै भुज भएको वृत्तान्तर्गत समबहुभुज क्षेत्रका सबै भुजको योगको बराबर सो वृत्तको परिधि हुन आउने देखिन्छ ।

यस कारण अत्यन्त धेरै भुज भएको वृत्तान्तर्गत समबहुभुज क्षेत्रको एउटा भुजको मान ल्याई त्यसलाई भुजको संख्याले गुनिदियो भने सो वृत्तको परिधि हुन आउने देखिन्छ ।

वृत्तको परिधिमा २१६०० कला हुन्छन् भन्ने कुरो २ प्रक्रममा देखाइएको छ । २१६०० ÷ २२५ = ९६ हुन्छ । यस कारण वृत्तमा २२५ कलाका चाप ९६ वटा हुन्छन् । वृत्तान्तर्गत समषण्णवतिभुज (बराबर ९६ वटा भुज भएको) क्षेत्र बनाए पनि सो बहुभुज क्षेत्रको भुज र सो भुज पूर्णज्या भएको चापको अन्तर थाहा नपाइने हुन जान्छ । तैपनि सूक्ष्मताको लागि वृत्तान्तर्गत समषट्त्रिंशदधिकपञ्चदशशतभुज (बराबरका १५३६ वटा भुज भएको) क्षेत्र बनाई त्यसको एउटा भुजको मानलाई १५३६ ले गुनी सो वृत्तको परिधि ल्याउने काम गरिन्छ ।

वृत्तान्तर्गत बराबरका १५३६ वटा भुज भएको क्षेत्रको एउटा भुजको मान $\frac{२१६००}{१५३६} = \frac{२२५}{१६}$ कलाको पूर्णज्या हुन्छ । $\frac{२२५}{१६}$ कलाको पूर्णज्या $\frac{२२५}{३२}$ कलाको ज्याको २ गुना हुन्छ । यस कारण $\frac{२२५}{३२}$ कलाको ज्या ल्याई त्यसलाई २ ले गुन्दा वृत्तान्तर्गत बराबरका १५३६ वटा भुज भएको क्षेत्रको एउटा भुजको मान आउने भयो ।

$\frac{२२५}{३२}$ कला = $\frac{१५}{१२८}$ अंश = $\frac{३०}{२५६}$ अंश हो । यस कारण $\frac{३०}{२५६}$ अंशको ज्या ल्याउनुपर्‍यो । २५६ = $२^{८}$ हो । यस कारण ३० अंशको ज्या ल्याई त्यसको आधाको, फेरि आधाको पनि आधाको यही क्रमले आधा आधा चापको ज्या ल्याउने काम ८ बाजि गर्‍यो भने $\frac{३०}{२५६}$ अंशको ज्या आउँछ ।

जति ठूलो त्रिज्या मान्यो उति गणित सूक्ष्म हुने हुनाले $१०^{१०}$ = १०००००००००० (दश पद्म) त्रिज्या मानी गणित गरिन्छ ।

३० अंशको ज्या त्रिज्याको आधा हुन्छ । [१० प्रक्रमबाट]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$\therefore$ ३०° को ज्या = ५०००००००००

$\frac{३०°}{२}$ को ज्या$^२$ = $\frac{३०° \text{ को उत्क्रमज्या} \times \text{त्रि}}{२}$ [१८ प्रक्रमबाट]

= ३०° को उत्क्रमज्या × ५०००००००००

३०° को उत्क्रमज्या = त्रि − ३०° को कोज्या = त्रि − $\sqrt{\text{त्रि}^२ - ३०° \text{को ज्या}^२}$

= १०००००००००० − $\sqrt{(१००००००००००)^२ - (५०००००००००)^२}$

यो नियमअनुसार अब काम गरिन्छ ।

त्रिज्याको वर्ग = १००००००००००००००००००००

३०° को ज्याको वर्ग = २५००००००००००००००००००

३०° को कोज्याको वर्ग = ७५००००००००००००००००००

८ )७५००००००००००००००००००( ८६६०२५४०३७·८४

| | |
|---|---|
| ८ | ६४ |
| १६६ | ११०० |
| ६ | ९९६ |
| १७२६ | १०४०० |
| ६ | १०३५६ |
| १७३२०२ | ४४०००० |
| २ | ३४६४०४ |
| १७३२०४५ | ९३५९६०० |
| ५ | ८६६०२२५ |
| १७३२०५०४ | ६९९३७५०० |
| ४ | ६९२८२०१६ |
| १७३२०५०८०३ | ६५५४८४०००० |
| ३ | ५१९६१५२४०९ |
| १७३२०५०८०६७ | १३५८६८७५९१०० |
| ७ | १२१२४३५५६४६९ |
| १७३२०५०८०७४८ | १४६२५२०२६३१०० |
| ८ | १३८५६४०६४५९८४ |
| १७३२०५०८०७५६४ | ७६८७९६१७११६०० |
| ४ | ६९२८२०३२३०२५६ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

∴ ३०° को कोज्या = ८६६०२५४०३७·८४

त्रिज्या = १००००००००००

८६६०२५४०३७·८४

३०° को उत्क्रमज्या = १३३९७४५९६२·१६

∴ $\frac{३०°}{२}$ को ज्यावर्ग = $\frac{१०००००००००० \times १३३९७४५९६२·१६}{२}$

= ६६९८७२९८१०८००००००००

त्रिज्यावर्ग = १००००००००००००००००००००

६६९८७२९८१०८००००००००

$\frac{३°}{२}$ अंको कोज्यावर्ग = ९३३०१२७०१८९२००००००००

```
९         )९३३०१२७०१८९२००००००००(९६५९२५८२६२·८८
९           ८१
------      ------
१८६         १२३०
  ६         १११६
------      ------
१९२५         ११४१२
   ५          ९६२५
------       ------
१९३०९         १७८७७०
    ९         १७३७८१
------       --------
१९३१८२          ४९८९१८
     २          ३८६३६४
-------        --------
१९३१८४५        ११२५५४९२
      ५         ९६५९२२५
--------       ---------
१९३१८५०८        १५९६२६७००
       ८        १५४५४८०६४
---------      ----------
१९३१८५१६२         ५०७८६३६००
        २         ३८६३७०३२४
----------       -----------
१९३१८५१६४६        १२१४९३२७६००
         ६        ११५९११०९८७६
-----------      ------------
१९३१८५१६५२          ५५८२१७७२४००
```

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | |
|---|---|
| १९३१८५१६५२२ | ५५८२१७७२४०० |
| २ | ३८६३७०३३०४४ |
| १९३१८५१६५२४८ | १७१८४७३९३५६०० |
| ८ | १५४५४८१३२१९८४ |
| १९३१८५१६५२५६८ | १७२९९२६१३६१६०० |
| ८ | १५४५४८१३२२०५४४ |
| | १८४४४८१४१०५६ |

∴ $\frac{३०}{२}$ अंको कोज्या = ९६५९२५८२६२·८९

त्रिज्या = १०००००००००००

९६५९२५८२६२·८९

$\frac{३०}{२}$ अंको उत्क्रमज्या = ३४०७४१७३७·११

∴ $\frac{३०}{४}$ अंको ज्यावर्ग = $\frac{१०००००००००० \times ३४०७४१७३७·११}{२}$

= १७०३७०८६८५५५००००००००

त्रिज्यावर्ग = १००००००००००००००००००००

१७०३७०८६८५५५००००००००

$\frac{३०}{४}$ अंको कोज्यावर्ग = ९८२९६२९१३१४४५००००००००

९ ) ९८२९६२९१३१४४५००००००००( ९९१४४८६१३·७३

| | |
|---|---|
| ९ | ८१ |
| १८९ | १७२९ |
| ९ | १७०१ |
| १९८१ | २८६२ |
| १ | १९८१ |
| १९८२४ | ८८१९१ |
| ४ | ७९२९६ |
| १९८२८४ | ८८९५३१ |
| ४ | ७९३१३६ |
| १९८२८८ | ९६३९५४४ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | |
|---|---|
| १९८२८८४ | ९६३९५४४ |
| ४ | ७९३१५३६ |
| १९८२८८८८ | १७०८००८५० |
| ८ | १५८६३११०४ |
| १९८२८८९६६ | १२१६९७४६०० |
| ६ | ११८९७३३७९६ |
| १९८२८८९७२१ | २७२४०८०४०० |
| १ | १९८२८८९७२१ |
| १९८२८८९७२२३ | ७४११९०६७९०० |
| ३ | ५९४८६६९१६६९ |
| १९८२८८९७२२६७ | १४६३२३७६२३१०० |
| ७ | १३८८०२२८०५८६९ |
| १९८२८८९७२२७४३ | ७५२१४८१७२३१०० |
| ३ | ५९४८६६९१६८२२९ |
| | १५७२८१२५५४८७१ |

$\therefore \frac{३}{४}^{\circ}$ अंको कोज्या $=$ ९९१४४४८६१३·७४

त्रिज्या $=$ १०००००००००००

९९१४४४८६१३·७४

$\frac{३}{४}^{\circ}$ अंको उत्क्रमज्या $=$ ८५५५१३८६·२६

$\frac{३}{८}^{\circ}$ अंको ज्यावर्ग $= \frac{१०००००००००००\times ८५५५१३८६\cdot२६}{२}$

$=$ ४२७७५६९३१३००००००००

त्रिज्यावर्ग $=$ १००००००००००००००००००००००

४२७७५६९३१३००००००००

$\frac{३}{८}^{\circ}$ अंको कोज्यावर्ग $=$ ९९५७२२४३०६८७००००००००

| | |
|---|---|
| ९ | )९९५७२२४३०६८७००००००००(९९७८५८९२३२·३८ |
| ९ | ८१ |
| १८ | १८५७ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | |
|---|---|
| १८९ | १८५७ |
| ९ | १७०१ |
| १९८७ | १५६२२ |
| ७ | १३९०९ |
| १९९४८ | १७१३४३ |
| ८ | १५९५८४ |
| १९९५६५ | ११७५९०६ |
| ५ | ९९७८२५ |
| १९९५७०८ | १७८०८१८७ |
| ८ | १५९६५६६४ |
| १९९५७१६९ | १८४२५२३०० |
| ९ | १७९६१४५२१ |
| १९९५७१७८२ | ४६३७७७९०० |
| २ | ३९९१४३५६४ |
| १९९५७१७८४३ | ६४६३४३३६०० |
| ३ | ५९८७१५३५२९ |
| १९९५७१७८४६२ | ४७६२८००७१०० |
| २ | ३९९१४३५६९२४ |
| १९९५७१७८४६४३ | ७७१३६५०१७६०० |
| ३ | ५९८७१५३५३९२९ |
| १९९५७१७८४६४६८ | १७२६४९६६३६७१०० |
| ८ | १५९६५७४२७७१७४४ |
| | १२९९२२३५९५३५६ |

$\therefore$ $\frac{३}{८}^{\circ}$ अंको कोज्या = ९९७८५८९२३२·३९

त्रिज्या १०००००००००००

९९७८५८९२३२·३९

$\frac{३}{८}^{\circ}$. अंको उत्क्रमज्या = २१४१०७६७·६१

$\therefore$ $\frac{३}{१६}^{\circ}$ अंको ज्यावर्ग = $\frac{१०००००००००० \times २१४१०७६७·६१}{२}$

= १०७०५३८३८०५००००००००

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

```
त्रिज्यावर्ग                    = १००००००००००००००००००००००.
                                        १०७०५३८३८०५०००००००
                                   ------------------------
३०/१६ अंको कोज्यावर्ग           =    ९९८९२९४६१६१९५०००००००
```

```
९          )९९८९२९४६१६१९५०००००००(९९९४६४५८७४·७६
  ९         ८१
-------    ------
१८९         १८८९
    ९       १७०१
-------    ------
१९८९         १८८२९
     ९       १७९०१
--------    -------
१९९८४          ९२८४६
      ४        ७९९३६
---------     --------
१९९८८६        १२९१०१६
       ६       ११९९३१६
----------    ---------
१९९८९२४          ९१७००१९
        ४        ७९९५६९६
-----------     ----------
१९९८९२८५        ११७४३२३५०
         ५        ९९९४६४२५
------------     -----------
१९९८९२९०८        १७४८५९२५००
          ८       १५९९१४३२६४
-------------    -------------
१९९८९२९१६७        १४९४४९२३६००
           ७       १३९९२५०४१६९
--------------    --------------
१९९८९२९१७४४          ९५२४१९४३१००
            ४        ७९९५७१६६९७६
---------------     ---------------
१९९८९२९१७४८७        १५२८४७७६१२४००
             ७       १३९९२५०४२२४०९
----------------    ----------------
१९९८९२९१७४९४६         १२९२२७१८९९९१००
              ६       :११९९३५७५०४९६७६
-----------------     -----------------
                         ९२९१४३९४९४२४
```

∴ $\frac{३०}{१६}$ अंको कोज्या = ९९९४६४५८७४·७६

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

त्रिज्या = १००००००००००

$$\frac{\text{९९९४६४५८७४·७६}}{}$$

$\frac{३}{२}\frac{०}{६}$ अंको उत्क्रमज्या = ५३५४१२५·२४

$\therefore \frac{३}{२}\frac{०}{२}$ अंको ज्यावर्ग = $\frac{\text{१०००००००००००} \times \text{५३५४१२५·२४}}{\text{२}}$

= २६७७०६२६२००००००००

त्रिज्यावर्ग = १००००००००००००००००००००
२६७७०६२६२००००००००

$\frac{३}{२}\frac{०}{२}$ अंको कोज्यावर्ग = ९९९७३२२९३७३८००००००००

| | |
|---|---|
| ९ | )९९९७३२२९३७३८०००००००००० (९९९८६६१३७९·०९ |
| ९ | ८१ |
| १८९ | १८९७ |
| ९ | १७०१ |
| १९८९ | १९६३२ |
| ९ | १७९०१ |
| १९९८८ | १७३१२९ |
| ८ | १५९९०४ |
| १९९९६६ | १३२२५३७ |
| ६ | ११९९७९६ |
| १९९९७२६ | १२२७४१३८ |
| ६ | ११९९८३५६ |
| १९९९७३२१ | २७५७८२०० |
| १ | १९९९७३२१ |
| १९९९७३२२३ | ७५८०८७९०० |
| ३ | ५९९९१९६६९ |
| १९९९७३२२६७ | १५८१६८२३१०० |
| ७ | १३९९८१२५८६९ |
| १९९९७३२२७४ | १८१८६९७२३१०० |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | |
|---|---|
| १९९९७३२२७४९ | १८१८६९७२३१०० |
| ९ | १७९९७५९०४७४१ |
| १९९९७३२२७५८०९ | १८९३८१८३५९०००० |
| ९ | १७९९७५९०४८२२८१ |
| | ९४०५९३१०७७१९ |

∴ ३०/३२ अंको कोज्या = ९९९८६६१३७९·०९

त्रिज्या = १००००००००००

९९९८६६१३७९·०९

३०/३२ अंको उत्क्रमज्या = १३३८६२०·९१

∴ ३०/६४ अंको ज्यावर्ग = (१०००००००००० × १३३८६२०·९१) / २

= ६६९३१०४५५००००००

त्रिज्यावर्ग = १००००००००००००००००००००

६६९३१०४५५००००००

३०/६४ अंको कोज्यावर्ग = ९९९९३३०६८९५४५००००००

| | |
|---|---|
| ९ | )९९९९३३०६८९५४५०००००००(९९९९६६५३३९·१७ |
| ९ | ८१ |
| १८९ | १८९९ |
| ९ | १७०१ |
| १९८९ | १९८३३ |
| ९ | १७९०१ |
| १९९८९ | १९३२०६ |
| ९ | १७९९०१ |
| १९९९८६ | १३३०५८९ |
| ६ | ११९९९१६ |
| १९९९९२ | १३०६७३५४ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | |
|---|---|
| १९९९९२६ | १३०६७३५४ |
| ६ | ११९९९५५६ |
| १९९९९३२५ | १०६७७९८५० |
| ५ | ९९९९६६२५ |
| १९९९९३३०३ | ६७८३२२५०० |
| ३ | ५९९९७९९०९ |
| १९९९९३३०६३ | ७८३४२५९१०० |
| ३ | ५९९९७९९१८९ |
| १९९९९३३०६६९ | १८३४४५९९११०० |
| ९ | १७९९९३९७६०२१ |
| १९९९९३३०६७८१ | ३४५२०१५०७९०० |
| १ | १९९९९३३०६७८१ |
| १९९९९३३०६७८२७ | १४५२०८२०१११९०० |
| ७ | १३९९९५३१४७४७८९ |
| | ५२१२८८६३७१११ |

∴ $\frac{३०}{६४}$ अंको कोज्या = ९९९९६६५३३९·१७

त्रिज्या = १००००००००००

९९९९६६५३३९·१७

$\frac{३०}{६४}$ अंको उत्क्रमज्या = ३३४६६०·८३

∴ $\frac{३०}{१२८}$ अंको ज्यावर्ग = $\frac{१००००००००००\times ३३४६६०·८३}{२}$

= १६७३३०४१५०००००००

त्रिज्यावर्ग = १००००००००००००००००००००

१६७३३०४१५०००००००

$\frac{३०}{१२८}$ अंको कोज्यावर्ग = ९९९९८३२६६९५८५०००००००

```
         ९        )९९९९८३२६६९५८५००००००० (९९९९९१६३३४.४४
         ९         ८१
       ----      ------
       १८९        १८९९
         ९         १७०१
      ------     -------
      १९८९         १९८८३
          ९        १७९०१
      -------    --------
      १९९८९        १९८२२६
           ९       १७९९०१
      --------   ---------
      १९९९८९       १८३२५६९
            ९      १७९९९०१
      ---------  ----------
      १९९९९८१       ३२६६८५८
             १      १९९९९८१
      ---------  ------------
      १९९९९८२६     १२६६८७७५०
             ६      ११९९९८९५६
      ----------  ------------
      १९९९९८३२३      ६६८८७९४००
              ३     ५९९९९४९६९
      -----------  ------------
      १९९९९८३२६३      ६८८८४४३१००
               ३     ५९९९९४९७८९
      ------------  -------------
      १९९९९८३२६६४      ८८८४९३३११००
                ४     ७९९९९३३०६५६
      -------------  --------------
      १९९९९८३२६६८४     ८८५००००४४४००
                 ४    ७९९९९३३०६७३६
      --------------  ---------------
      १९९९९८३२६६८८४     ८५००६७३७६६४००
                  ४    ७९९९९३३०६७५३६
      ---------------  ----------------
                          ५००७४०६९८८६४
```

∴ $१^{३}२^{०}८$ अंको कोज्या = ९९९९९१६३३४.४४

त्रिज्या = १०००००००००००

९९९९९१६३३४.४४

$१^{३}२^{०}८$ अंको उत्क्रमज्या = ८३६६५.५६

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

∴ ३०/२५६ अंको ज्यावर्ग = (१०००००००००००० × ८३६६५·५६)/२

= ४१८३२७८००००००००

```
२      )४१८३२७८००००००००(२०४५३०६३·३४
२        ४
———      ————
४०४      १८३२
  ४      १६१६
————     —————
४०८५      २१६७८
   ५      २०४२५
—————    —————
४०९०३      १२५३००
    ३     १२२७०९
——————    ——————
४०९०६०६      २५९१००००
      ६     २४५४३६३६
———————     —————————
४०९०६१२३      १३६६३६४००
       ३     १२२७१८३६९
————————     —————————
४०९०६१२६३      १३९१८०३१००
        ३     १२२७१८३७८९
—————————     ——————————
४०९०६१२६६४      १६४६१९३११००
         ४     १६३६२४५०६५६
——————————     ———————————
                 ९९४८०४४४
```

∴ ३०/२५६ अंको ज्या = २०४५३०६३·३४

३०/२५६ अंश अर्थात् २२५/३२ कलाको ज्या २०४५३०६३·३४ हुन्छ । यसलाई २ ले गुन्दा ४०९०६१२६·६८ आउँछ । यो संख्या २२५/१६ कलाको पूर्णज्या भयो । यो पूर्णज्या वृत्तान्तर्गत बराबरका १५३६ वटा भुज भएको क्षेत्रको एउटा भुज हो । यस कारण यो भुजको मान ४०९०६१२६·६८ लाई १५३६ ले गुन्दा–

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

४०९०६१२६'६८
१५३६

२४५४३६७६००८
१२२७१८३८००४
२०४५३०६३३४०
४०९०६१२६६८

६२८३१८१०५८०'४८ हुन्छ ।

यो संख्या सो बहुभुज क्षेत्रका सबै भुजको योग हो, अर्थात् सो वृत्तको परिधि हो । यस कारण १०००००००००० त्रिज्या अर्थात् २०००००००००० (बीस पद्म) व्यास भएमा ६२८३१८१०५८०'४८ परिधि हुन आउने देखियो ।* यो मान आसन्न अर्थात् नजीकको हो, वास्तव होइन । किन भने हामीले मूल गर्दा आसन्न मान लिएका छौं । हामीले $\frac{३०}{२५६}$ अंशसम्मको ज्या ल्याई यो काम गरेका छौं । यसभन्दा पनि सानासाना चापका ज्या ल्याउंदै काम गर्दै गए गणित क्रन् क्रन् सूक्ष्म हुन्छ । परन्तु जतिसुकै सूक्ष्म बनाउंदै गए पनि वास्तव मान भेट्टाउन सकिदैन । आसन्न मान लिई चित्त बुझाउनुपर्छ । अहिलेलाई ५ स्थान सम्मका पूर्णाङ्क लिई अर्थात् १०००० त्रिज्या मानी व्यास र परिधिको सम्बन्ध यहाँ ल्याइन्छ ।

१०००० (दस हजार) त्रिज्या माने ६२८३१'८...परिधि आउँछ । पूर्णाङ्क व्यासको आसन्न पूर्णाङ्क नै परिधि लिने हो भने २०००० व्यासको ६२८३२ परिधि हुन्छ ।

यस विषयमा भास्करले बोलेको कुरो यहाँ लेखिन्छ-

महद् अयुताऽदि व्यासार्धं प्रकल्प्य वृत्तशतां१००शाद् अपि सूक्ष्मविभागस्य ज्योत्पत्तिविधिना ज्या साध्या । यत्संख्याकस्य विभागस्य ज्या तत्संख्यया सा गुणिता सती परिधिर् भवति । यतः शतां१०.०शाद् अपि सूक्ष्मोंऽशो वृत्तो समः स्यात् । अतोऽ-

---

* व्यास र परिधिको सम्बन्ध ल्याउने अरू अरू रीति पनि छन् । यी विषयमा हामी पछि बोल्नेछौं ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

युतद्वय२००००व्यासे द्विकाऽग्न्यष्टयमर्तु६२८३२मितः परिधिर् आर्यभटाऽऽद्यैर् अङ्गीकृतः ।

( सिद्धान्तशिरोमणि भुवनकोश ५२ श्लोकको वासनाभाष्य )

[१०००० वा त्यसमन्दा ठूलो त्रिज्या मानी परिधिको सय खण्डभन्दा पनि सानो भागको पूर्णज्या ज्योत्पत्तिमा बताएको रीतिअनुसार ल्याउनू । जतियौं भागको पूर्णज्या ल्याइएको छ, त्यो संख्याले त्यो पूर्णज्यालाई गुनिदियो भने परिधि आउँछ । किन भने परिधिको सय खण्डभन्दा पनि सानो चाप सोझो हुन्छ । यसरी २०००० (बीस हजार) व्यास भएमा ६२८३२ (बासट्ठी हजार आठ सय बत्तीस) परिधि हुन्छ भनी आर्यभट आदि आचार्यहरूले बोलेका छन् ।]

## २६ प्रक्रम

वि॰ सं. ५५६ का प्रथम आर्यभटले तलको श्लोक बोलेका छन्:-

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस् तथा सहस्राणाम्६२८३२ ।
अयुतद्वय२००००विष्कम्भस्याऽऽसन्नो वृत्तपरिणाहः ।।२७।।

( आर्यभटीय गणितपाद १० श्लोक )

[२०००० व्यास भएमा ६२८३२ परिधि हुन्छ । यो आसन्न मान हो ।]

यताबाट $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{६२८३२}{२००००} = \frac{३१४१६}{१००००} = ३{\cdot}१४१६$

फेरि $\frac{६२८३२}{२००००} = \frac{३९२७}{१२५०} = ३ + \frac{१७७}{१२५०} = ३ + \cfrac{१}{\cfrac{१२५०}{१७७}}$

$$= ३ + \cfrac{१}{७ + \cfrac{११}{१७७}} = ३ + \cfrac{१}{७ + \cfrac{१}{\cfrac{१७७}{११}}} = ३ + \cfrac{१}{७ + \cfrac{१}{१६ + \cfrac{१}{११}}}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यताबाट $३+\frac{१}{७}=\frac{२२}{७}$

$$३+\cfrac{१}{७+\cfrac{१}{१६}} = ३+\cfrac{१}{\cfrac{११३}{१६}} = ३+\frac{१६}{११३} = \frac{३५५}{११३}$$

यस कारण ७ व्यास भएमा २२ परिधि, ११३ व्यास भएमा ३५५ परिधि, १२५० व्यास भएमा ३९२७ परिधि, १०००० व्यास भएमा ३१४१६ परिधि आउँछन् । १ व्यास भएमा चाहिं ३·१४१६ परिधि आउँछ ।

अहिलेलाई ७ व्यास भएमा २२ परिधि र ११३ व्यास भएमा ३५५ परिधि मानी हामी काम चलाउँछौं ।

व्यासे शरेषुत्रि३५५हते विभक्ते
त्रिरूपचन्द्रैः११३ परिधिः प्रसिद्धचेत् ।
द्वाविंशति२२घ्ने विहृते महीध्रैः७
स्थूलो भवेत् स व्यवहारयोग्यः ।।२८।।

[वृत्तको व्यासलाई ३५५ ले गुनेर ११३ ले भाग लियो भने परिधि आउँछ, २२ ले गुनेर ७ ले भाग लियो भने कामचलाउ मोटामोटी (स्थूल) परिधि आउँछ ।]

व्यास $\times \frac{३५५}{११३}$ = परिधि हुने हुनाले परिधि $\times \frac{११३}{३५५}$ = व्यास हुन्छ ।

यसै गरी परिधि $\times \frac{७}{२२}$ = मोटामोटी व्यास हुन्छ ।

यताबाट व्यास थाहा पाई परिधि ल्याउँदाका गुणक र भाजकलाई उल्टाउँदा अर्थात् गुणकलाई भाजक, भाजकलाई गुणक बनाउँदा परिधि थाहा पाई व्यास ल्याउने काममा उपयोग गर्न सकिन्छ भन्ने कुरा सिद्ध हुन्छ ।

१ उदाहरण—

विष्कम्भमानं किल सप्त ७ यत्र
तत्र प्रमाणं परिधेः प्रचक्ष्व ।

(लीलावती क्षेत्रव्यवहार ९६ सूत्रको उदाहरण)

[ ७ व्यास भएमा परिधि कति होला ? ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

परिधि $= ७ \times \frac{३५५}{११३} = २१·९९१$

मोटामोटी परिधि $= ७ \times \frac{२२}{७} = २२$

यस कारण ७ व्यास भएमा २१·९९१ परिधि तथा २२ मोटामोटी परिधि हुन्छ ।

२ उदाहरण—

द्वाविंशतिर्२२ यत्परिधिप्रमाणं
तद्व्याससंख्यां च सखे विचिन्त्य ।।

(लीलावती क्षेत्रव्यवहार ९६ सूत्रको उदाहरण)

[२२ परिधि भएमा व्यास कति होला ?]

व्यास $= २२ \times \frac{११३}{३५५} = ७·००३$

मोटामोटी व्यास $= २२ \times \frac{७}{२२} = ७$

यस कारण २२ परिधि भएमा ७·००३ व्यास तथा ७ मोटामोटी व्यास हुन्छ ।

## १६–प्रश्नमाला

परिधि र मोटामोटी परिधि ल्याऊ

(१) २४० व्यास भएमा
(२) ३५० व्यास भएमा
(३) ४५० व्यास भएमा
(४) ८५० व्यास भएमा
(५) ८७० व्यास भएमा
(६) ८७०० व्यास भएमा
(७) ९५५० व्यास भएमा
(८) ९७००० व्यास भएमा

व्यास र मोटामोटी व्यास ल्याऊ

(९) ३६० परिधि भएमा
(१०) २५०० परिधि भएमा
(११) ३२०० परिधि भएमा
(१२) ३३०० परिधि भएमा
(१३) ४९६७ परिधि भएमा
(१४) ५००० परिधि भएमा
(१५) २१६०० परिधि भएमा
(१६) ३०००२ परिधि भएमा

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

(१) ७५३·९८२, ७५४·२८६ (२) १०९९·५५८, ११००
(३) १४१३·७१७, १४१४·२८६ (४) २६७०·३५४, २६७१·४२९
(५) २७३३·१८६, २७३४·२८६ (६) २७३३१·८५८, २७३४२·८५७
(७) ३०००२·२१२, ३००१४·२८६ (८) ३०४७३४·५१३, ३०४८५७·१४३
(९) ११४·५९२, ११४·५४५ (१०) ७९५·७७५, ७९५·४५५
(११) १०१८·५९२, १०१८·१८२ (१२) १०५०·४२३, १०५०
(१३) १५८१·०४५, १५८०·४०९ (१४) १५९१·५४९, १५९०·९०९
(१५) ६८७५·४९३, ६८७२·७२७ (१६) ९५४९·९३२, ९५४६·०९१

# २७ प्रक्रम

## ३४३८ त्रिज्या मान्नाको कारण

२५ प्रक्रममा $\frac{३०}{२५६}$ अंश अर्थात् $\frac{२२५}{३२}$ = $७\frac{१}{३२}$ कलाको ज्या २०४५३०६३·३४ हुन्छ भनी गणितद्वारा हामीले सिद्ध गरेका छौं। २२५ कला वा त्यसभन्दा सानो चाप भएमा ज्या र चापमा फरक थाहा पाइँदैन भन्ने कुरो माथि २४ प्रक्रममा लेखिएको छ। परन्तु अहिले $७\frac{१}{३२}$ = ७·०३१२५ कलाको ज्या २०४५३०६३·३४ भएकोले ज्या र चापको संख्यात्मक मानमा फरक परेको प्रत्यक्ष देखियो। यस कारण माथि २४ प्रक्रममा भनेको कुरोमा विरोध परेको देखिन आयो। अब यस विषयमा विचार गरिन्छ।

माथि ५ सारणीमा चापलाई पनि जौमा, ज्यालाई पनि जौमा ल्याई तिनको अन्तर देखाइएको छ। अर्थात् ज्या र चापलाई एकै नापोले नापिएको छ। त्यहाँ त्यही प्रसङ्गमा २२५ कला वा त्यसभन्दा साना चाप भएमा ज्या र चापमा फरक थाहा पाइँदैन भन्ने कुरा लेखिएको हो। अहिले यहाँ त्रिज्या १०००००००००० (दश पद्म) परिधिचाहिं कलात्मक अर्थात् २१६०० मानिएको छ। यसो गर्दा $७\frac{१}{३२}$ कलाको ज्या २०४५३०६३·३४ हुन्छ। यस कारण ज्या र चापमा आँखाले प्रत्यक्ष नदेखिने भेद गणितबाट देखिन आयो भन्ने शङ्का उठेको हो।

माथि २४ प्रक्रममा जस्तै व्यास र परिधिलाई एकै नापोले नापेमा $७\frac{१}{३२}$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

कलाको चाप र ज्यामा रहेको अभेद गणितद्वारा पनि प्रत्यक्ष देखित आउला भन्ने कुरो मनमा फुर्छ । कस कारण अब यस विषयमा विचार गरिन्छ ।

२१६०० परिधि भएमा ६८७५·४९३ व्यास हुन्छ भन्ने कुरो १६ प्रश्न-मालाको १५ प्रश्नको उत्तरबाट देखिन आउँछ । यस कारण सो व्यासको आधा ३४३७·७४६ त्रिज्या भएमा

$$\frac{३०}{२५६} \text{ अंशको ज्या} = \frac{२०४५३०६३·३४ \times ३४३७·७४६}{१०००००००००००}$$

$$= ७·०३१२\ldots \text{हुन्छ [२५ प्रक्रम]}$$

यहाँ चाप $७\frac{१}{३२}$ = ७·०३१२...छ, त्यसको ज्या ७·०३१२...छ । यस कारण ज्या र चापमा अभेद भएको गणितबाट पनि देखिन आयो ।

आँखाले प्रत्यक्ष देखिने ज्या र चापको अभेद गणितबाट पनि देखियोस् भनी आर्यभट आदि प्राचीन आचार्यहरूले चक्रकला (२१६००) परिधि भएमा हुन आउने अर्धव्यास ३४३७·७४६ = ३४३८(आसन्न) त्रिज्या मानी गणित गरेका हुन् ।

## २८ प्रक्रम

हामीले माथि (२५ प्रक्रममा) व्यास र परिधिको सम्बन्ध ल्याउन दश पद्म त्रिज्या मानी केही ज्या ल्याएका छौं । ठूलो त्रिज्या मानी ल्याइएका हुनाले ती ज्या सूक्ष्म छन् । २४ वटा ज्या ल्याउने रीतको विषयमा भास्करले बोलेको कुरा हामीले माथि उद्धरण गरिसकेका छौं ।† अब पहिले हामी १०००००००००० (दश पद्म) त्रिज्या मानी २२५ कलादेखि उठान गरी २२५, २२५ कला बढ्दै गएका २४ वटा चापका ज्या ल्याउँछौं ।

१०००००००००० त्रिज्या भएमा

$३०^\circ$ को ज्या = ५००००००००००

$६०^\circ$ को ज्या = $३०^\circ$ को कोज्या = ८६६०२५४०३७·८४

$$१५^\circ \text{ को ज्या} = \frac{३०^\circ}{२} \text{को ज्या} = \sqrt{६६९८७२९८१०८००००००००}$$

$$= २५८८१९०४५१·०३$$

† यही पुस्तकका ४६–५६ पृष्ठ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$\text{७५}^\circ \text{ को ज्या} = \frac{\text{३०}^\circ}{\text{२}} \text{को कोज्या} = \text{९६५९२५८२६२·८९}$$

$$\text{७}^\circ\text{३०}' \text{ को ज्या} = \frac{\text{३०}^\circ}{\text{४}} \text{ को ज्या} = \sqrt{\text{१७०३७०८६८५५५००००००००}}$$

$$= \text{१३०५२६१९२२·२}$$

$$\text{८२}^\circ\text{३०}'\text{को ज्या} = \frac{\text{३०}^\circ}{\text{४}} \text{को कोज्या} = \text{९९१४४४८६१३·७४}$$

$$\text{३}^\circ\text{४५}' \text{ को ज्या} = \frac{\text{३०}^\circ}{\text{८}} \text{को ज्या} = \sqrt{\text{४२७७५६९३१३०००००००००}}$$

$$= \text{६५४०३१२९२·२९}$$

$$\text{८६}^\circ \text{ १५}' \text{ को ज्या} = \frac{\text{३०}^\circ}{\text{८}} \text{को कोज्या} = \text{९९७८५८९२३२·३९}$$

हामीलाई चाहिएका २४ वटा ज्यामध्ये २५ प्रक्रमबाट ३ अं ४५ क (=२२५ क पहिलो), ७ अं ३० क (दोस्रो), १५ अं (चौथो), ३० अं (आठौं), ६० अं (सोह्रौं), ७५ अं (बीसौं), ८२ अं ३० क (बाईसौं), ८६ अं १५ क (तेईसौं) र ९० अं (चौबीसौं) का समेत गरी ९ वटा ज्या हामीले पाएका छौं। अब बाँकी रहेका १५ वटा ज्यालाई हामी गणित गरी ल्याउँछौं।

$$\text{४५}^\circ \text{ को ज्या} = \sqrt{\tfrac{१}{२}\text{त्रि}^२} = \sqrt{\frac{(\text{१००००००००००})}{\text{२}}}$$

[ १० प्रक्रम]

$$= \sqrt{\text{५००००००००००००००००००००}}$$

$$= \text{७०७१०६७८११·८६}$$

$$\text{४५}^\circ \text{ को उत्क्रमज्या} = \text{१००००००००००} - \text{७०७१०६७८११·८६}$$

$$= \text{२९२८९३२१८८·१४}$$

$$\text{२२}^\circ\text{३०}'\text{ को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{त्रि} \times \text{४५}^\circ \text{ को उत्क्रमज्या}}{\text{२}}}$$

[१८ प्रक्रम]

$$= \sqrt{\frac{\text{१००००००००००} \times \text{२९२८९३२१८८·१४}}{\text{२}}}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$=\sqrt{\text{१४६४४६६०९४०७००००००००}}$

$=\text{३८२६८३४३२३·६५}$

२२°३०′ को कोज्या $=\sqrt{\text{त्रि}^{२}-(\text{२२°३०′ को ज्या})^{२}}$

$=\sqrt{(\text{१००००००००००})^{२}-(\text{३८२६८३४३२३·६५})^{२}}$

$=\sqrt{\text{८५३५५३३९०५९३००००००००}}$

$=\text{९२३८७९५३२५·११}$

∴ ६७°३०′ को ज्या = २२°३०′ को कोज्या = ९२३८७९५३२५·११

२२°३०′ को उत्क्रमज्या = १०००००००००० − ९२३८७९५३२५·११

= ७६१२०४६७४·८९

∴ ११°१५′ को ज्या $=\sqrt{\dfrac{\text{१००००००००००}\times\text{७६१२०४६७४·८९}}{\text{२}}}$

$=\sqrt{\text{३८०६०२३३७४४५०००००००}}$

$=\text{१९५०९०३२२०·१६}$

११°१५′ को कोज्या $=\sqrt{(\text{१००००००००००})^{२}-(\text{१९५०९०३२२०·१६})^{२}}$

$=\sqrt{\text{९६१९३९७६६२५५५०००००००}}$

$=\text{९८०७८५२८०४·०३}$

∴ ७८°४५′ को ज्या = ९८०७८५२८०४·०३

६७° ३०′ को कोज्या = २२° ३०′ को ज्या = ३८२६८३४३२३·६५

∴ ६७°३०′ को उत्क्रमज्या  १०००००००००० − ३८२६८३४३२३·६५

= ६१७३१६५६७६·३५

∴ ३३° ४५′ को ज्या $=\sqrt{\dfrac{\text{१००००००००००}\times\text{६१७३१६५६७६·३५}}{\text{२}}}$

$=\sqrt{\text{३०८६५८२८३८१७५०००००००}}$

$=\text{५५५५७०२३३०·२}$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$\text{३३}^\circ\ \text{४५}'\ \text{कों कोंज्या} = \sqrt{(\text{१००००००००००})^{\text{२}} - (\text{५५५५७०२३३०·२})^{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{६९१३४१७१६१८२५०००००००}}$$

$$= \text{८३१४६९६१२३·०३}$$

$$\therefore\ \text{५६}^\circ\ \text{१५}'\ \text{कों ज्या} = \text{८३१४६९६१२३·०३}$$

$$\text{७५}^\circ\ \text{को कोज्या} = \text{१५}^\circ\ \text{को ज्या} = \text{२५८८१९०४५१·०३}$$

$$\therefore\ \text{७५}^\circ\ \text{को उत्क्रमज्या} = \text{१००००००००००} - \text{२५८८१९०४५१·०३}$$

$$= \text{७४११८०९५४८·९७}$$

$$\therefore\ \text{३७}^\circ\ \text{३०}'\ \text{को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{१००००००००००} \times \text{७४११८०९५४८·९७}}{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{३७०५९०४७७४४८५०००००००}}$$

$$= \text{६०८७६१४२९०·०९}$$

$$\text{३७}^\circ\ \text{३०}'\ \text{को कोज्या} = \sqrt{(\text{१००००००००००})^{\text{२}} - (\text{६०८७६१४२९०·०९})^{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{६२९४०९५२२५५१५०००००००}}$$

$$= \text{७९३३५३३४०२·९१}$$

$$\therefore\ \text{५२}^\circ\ \text{३०}'\ \text{को ज्या} = \text{७९३३५३३४०२·९१}$$

$$\text{३७}^\circ\ \text{३०}'\ \text{को कोज्या} = \text{७९३३५३३४०२·९१}$$

$$\therefore\ \text{३७}^\circ\text{३०}'\text{को उत्क्रमज्या} = \text{१००००००००००} - \text{७९३३५३३४०२·९१}$$

$$= \text{२०६६४६६५९७·०९}$$

$$\therefore\ \text{१८}^\circ\ \text{४५}'\ \text{को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{१००००००००००} \times \text{२०६६४६६५९७·०९}}{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{१०३३२३३२९८५४५०००००००}}$$

$$= \text{३२१४३९४६५३·०३}$$

$$\text{१८}^\circ\ \text{४५}'\ \text{को कोज्या} = \sqrt{(\text{१००००००००००})^{\text{२}} - (\text{३२१४३९४६५३·०३})^{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{८९६६७६६७०१४५५०००००००}}$$

$$= \text{९४६९३०१२९४·९५}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$\therefore$ ७१° १५′ को ज्या $= \text{९४६९३०१२९४.९५}$

५२° ३०′ को कोज्या $=$ ३७° ३०′ को ज्या $= \text{६०८७६१४२९०.०९}$

$\therefore$ ५२° ३०′ को उत्क्रमज्या $= \text{१००००००००००} - \text{६०८७६१४२९०.०९}$

$= \text{३९१२३८५७०९.९१}$

$$\therefore \text{२६° १५′ को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{१००००००००००} \times \text{३९१२३८५७०९.९१}}{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{१९५६१९२८५४९५५०००००००}}$$

$$= \text{४४२२८८६९०२.१९}$$

$$\text{२६° १५′ को कोज्या} = \sqrt{(\text{१००००००००००})^{\text{२}} - (\text{४४२२८८६९०२.१९})^{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{८०४३८०७१४५०४५०००००००}}$$

$$= \text{८९६८७२७४१५.३३}$$

$\therefore$ ६३° ४५′ को ज्या $= \text{८९६८७२७४१५.३३}$

८२° ३०′ को कोज्या $=$ ७° ३०′ को ज्या $= \text{१३०५२६१९२२.२}$

$\therefore$ ८२° ३०′ को उत्क्रमज्या $= \text{१००००००००००} - \text{१३०५२६१९२२.२}$

$= \text{८६९४७३८०७७.८}$

$$\therefore \text{४१° १५′ को ज्या} = \sqrt{\frac{\text{१००००००००००} \times \text{८६९४७३८०७७.८}}{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{४३४७३६९०३८९०००००००००}}$$

$$= \text{६५९३४५८१५१}$$

$$\text{४१° १५′ को कोज्या} = \sqrt{(\text{१००००००००००})^{\text{२}} - (\text{६५९३४५८१५१})^{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\text{५६५२६३०९६११०००००००००}}$$

$$= \text{७५१८३९८०७४.७९}$$

$\therefore$ ४८° ४५′ को ज्या $= \text{७५१८३९८०७४.७९}$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

माथिको गणितबाट ल्याइएका २४ वटा ज्या क्रमैसँग तल दिइन्छन् ।

## ६ सारणी

त्रिज्या = १०००००००००० (दश पद्म)

| चाप अं। क | ज्या | चाप अं। क | ज्या |
|---|---|---|---|
| ३।४५ | ६५४०३१२९२·२९ | ४८।४५ | ७५१८३९८०७४·७९ |
| ७।३० | १३०५२६१९२२·२० | ५२।३० | ७९३३५३३४०२·९१ |
| ११।१५ | १९५०९०३२२०·१६ | ५६।१५ | ८३१४६९६१२३·०३ |
| १५।०० | २५८८१९०४५१·०३ | ६०।०० | ८६६०२५४०३७·८४ |
| १८।४५ | ३२१४३९४६५३·०३ | ६३।४५ | ८९६८७२७४१५·३३ |
| २२।३० | ३८२६८३४३२३·६५ | ६७।३० | ९२३८७९५३२५·११ |
| २६।१५ | ४४२२८८६९०२·१९ | ७१।१५ | ९४६९३०१२९४·९५ |
| ३०।०० | ५००००००००००·०० | ७५।०० | ९६५९२५८२६२·८९ |
| ३३।४५ | ५५५५७०२३३०·२० | ७८।४५ | ९८०७८५२८०४·०३ |
| ३७।३० | ६०८७६१४२९०·०९ | ८२।३० | ९९१४४४८६१३·७४ |
| ४१।१५ | ६५९३४५८१५१·०० | ८६।१५ | ९९७८५८९२३२·३९ |
| ४५।०० | ७०७१०६७८११·८६ | ९०।०० | १००००००००००·०० |

## २९ प्रक्रम

६ सारणीमा दिइएका २४ वटा ज्यालाई अब हामी अनुपात गरी ३४३८ त्रिज्यामा परिणत गर्छौं ।

१०००००००००० : ६५४०३१२९२·२९ : : ३४३८ : क

$$\text{क} = \frac{६५४०३१२९२·२९ \times ३४३८}{१००००००००००} = २२४·८५५९५८२८९३०२$$

∴ ३४३८ त्रिज्या भएमा ३°४५′ को ज्या = २२४·८५५९५८२८९३०२

= २२५ (आसन्न)

यही रीतबाट अरू २३ वटा ज्या पनि परिणत गरी तलको सारणीमा दिइएका छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# ७ सारणी

त्रिज्या = ३४३८

| चाप अंक | ज्या | आसन्न पूर्णाङ्क ज्या |
|---|---|---|
| ३।४५ | २२४·८५५९५८२८९३०२ | २२५ |
| ७।३० | ४४८·७४९०४८८५२३६० | ४४९ |
| ११।१५ | ६७०·७२०५२७०९१००८ | ६७१ |
| १५।०० | ८८९·८१९८७७०६४११४ | ८९० |
| १८।४५ | ११०५·१०८८८१७११७१४ | ११०५ |
| २२।३० | १३१५·६६५६४०४७०८७० | १३१६ |
| २६।१५ | १५२०·५८८५१६८२५०८८ | १५२१ |
| ३०।०० | १७१९ | १७१९ |
| ३३।४५ | १९१०·०५०४६११२२७६० | १९१० |
| ३७।३० | २०९२·९२१७९२९३२९४२ | २०९३ |
| ४१।१५ | २२६६·८३०९१२३१३८०० | २२६७ |
| ४५।०० | २४३१·०३३११३७१७४६८ | २४३१ |
| ४८।४५ | २५८४·८२५२५८११२८०२ | २५८५ |
| ५२।३० | २७२७·५४८७८३९२०४५८ | २७२८ |
| ५६।१५ | २८५८·५९२५२७०९७७१४ | २८५९ |
| ६०।०० | २९७७·३९५३३८२०९३९२ | २९७७ |
| ६३।४५ | ३०८३·४४८४८५३९०४५४ | ३०८३ |
| ६७।३० | ३१७६·२९७८३२७७२८१८ | ३१७६ |
| ७१।१५ | ३२५५·५४५७८५२०३८१० | २२५६ |
| ७५।०० | ३३२०·८५२९९०७८१५८२ | ३३२१ |
| ७८।४५ | ३३७१·९३९७९४०२५५१४ | ३३७२ |
| ८२।३० | ३४०८·५८७४३३४०३८१२ | ३४०९ |
| ८६।१५ | ३४३०·६३८९७८०९५६८२ | ३४३१ |
| ९०।०० | ३४३८ | ३४३८ |

प्राचीन आचार्यहरूले २४ वटा ज्यालाई पूर्णाङ्करूपमा दिईं ती ज्याका क्रमसंख्या तथा अन्तर पनि दिएका छन् । सो तलको सारणीबमोजिम छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# ८ सारणी

त्रिज्या = ३४३८

| क्रमसंख्या | चाप अंक | ज्या | अन्तर | क्रमसंख्या | चाप अंक | ज्या | अन्तर |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| पहिलो | ३।४५ | २२५ | | तेर्हौं | ४८।४५ | २५८५ | |
| | | | २२४ | | | | १४३ |
| दोस्रो | ७।३० | ४४९ | | चौधौं | ५२।३० | २७२८ | |
| | | | २२२ | | | | १३१ |
| तेस्रो | ११।१५ | ६७१ | | पन्ध्रौं | ५६।१५ | २८५९ | |
| | | | २१९ | | | | ११८ |
| चौथो | १५।०० | ८९० | | सोह्रौं | ६०।०० | २९७७ | |
| | | | २१५ | | | | १०६ |
| पाँचौं | १८।४५ | ११०५ | | सत्रौं | ६३।४५ | ३०८३‡ | |
| | | | २११ | | | | ९३ |
| छैटौं | २२।३० | १३१६‡ | | अठारौं | ६७।३० | ३१७६‡ | |
| | | | २०५ | | | | ८० |
| सातौं | २६।१५ | १५२१‡ | | उन्नाईसौं | ७१।१५ | ३२५६ | |
| | | | १९८ | | | | ६५ |
| आठौं | ३०।०० | १७१९ | | बीसौं | ७५।०० | ३३२१ | |
| | | | १९१ | | | | ५१ |
| नवौं | ३३।४५ | १९१० | | एक्काईसौं | ७८।४५ | ३३७२ | |
| | | | १८३ | | | | ३७ |
| दशौं | ३७।३० | २०९३ | | बाईसौं | ८२।३० | ३४०९ | |
| | | | १७४ | | | | २२ |
| एघारौं | ४१।१५ | २२६७ | | तेईसौं | ८६।१५ | ३४३१ | |
| | | | १६४ | | | | ७ |
| बार्हौं | ४५।०० | २४३१ | | चौबीसौं | ९०।०० | ३४३८ | |
| | | | १५४ | | | | |
| तेर्हौं | ४८।४५ | २५८५ | | | | | |

‡ भास्कराचार्यले छैटौं ज्या १३१५, सातौं ज्या १५२०, सत्रौं ज्या ३०८४,

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

गणित गर्न सजिलो होस् भन्नाका लागि प्राचीन पद्धतिमा ज्यालाई श्लोकमा लेखी कण्ठस्थ गर्ने चलन छ। माथि आएका २४ वटा ज्यालाई बताउने श्लोक यी हुन्—

तत्त्वाऽश्विनो२२५ नन्दसमुद्रवेदाश्४४९
चन्द्राऽद्रिषट्का६७१ गगनाऽङ्कनागाः८९०।
पञ्चाऽभ्ररुद्रा११०५ नृपविश्वतुल्या१३१६‡
आद्यैर् निरुक्ताः कुभुजेषुचन्द्राः१५२१‡ ॥२९॥
नन्दाऽवनीशैलभुवो१७१९ दिगङ्क-
चन्द्रा१९१० हुताशग्रहपूर्णदस्राः२०९३।
तुरङ्गषट्काऽकृतयः२२६७ कुराम-
सिद्धाः२४३१ शराऽष्टेषुयमाः२५८५ क्रमेण ॥३०॥
गजाऽश्विभान्य२७२८ङ्कशराष्टदस्रास्२८५९
तुरङ्गसप्तग्रहलोचनानि२९७७।
कृशानुकुम्भ्यभ्रगुणा३०८३‡ विपक्ष-
शैलेन्दुरामा३१७६‡ रसभूतदन्ताः३२५६ ॥३१॥

---

अठारौं ज्या ३१७७ दिएका छन् (सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार ३–६ श्लोक)। गणित गर्दा छैटौं ज्या १३१५·६६ ..., सातौं ज्या १५२०·५८..., सत्रौं ज्या ३०८३·४४..., अठारौं ज्या ३१७६·२९... आउँछन्। छैटौं र सातौं ज्याका दशमलव भाग आधाभन्दा अलिकति नाघेका छन्, सत्रौंमा आधा अलिकति पुगेको छैन, अठारौंमा ·२९ छ। यस कारण भास्करले बोलेको कुरा धेरै फरक परेको छैन तापनि "अर्धाऽधिके रूपं ग्राह्यम्, अर्धाऽल्पे रूपं त्याज्यम्" (आधाभन्दा बढ्ता भए १ लिनू, आधाभन्दा कम भए १ छोड्नू) यो नियमको राम्ररी प्रतिपालन होस् भनी यहाँ छैटौं ज्या १३१६, सातौं ज्या १५२१, सत्रौं ज्या ३०८३, अठारौं ज्या ३१७६ लिइएका छन्। अरू बाँकी २० वटा ज्या भास्करले बोलेकै सकारिएका छन्।

‡ यहाँ संशोधित पाठ दिइएको छ। यस विषयको विचार ८ सारणीको टिप्पणीमा हेर्नुहोस्।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

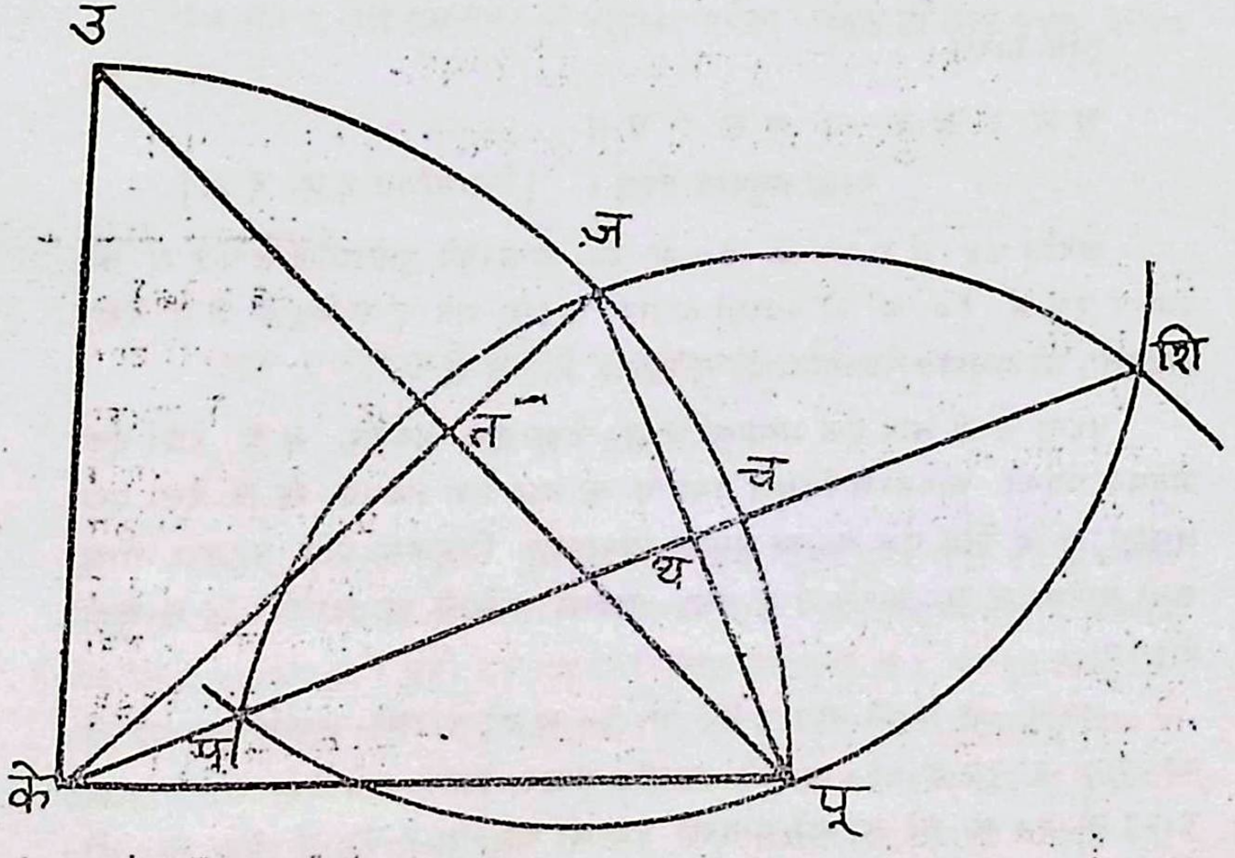
कुदन्तलोका३३२१ द्वितुरङ्गदेवा३३७२
गोऽश्वाऽब्धिलोका:३४०९ कुगुणाऽब्धिरामा:३४३१।
भुजङ्गलोकाऽब्धिगुणा: ३४३८ क्रमज्या: ... ।।३२।।
( सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार ३-६ श्लोक)

[२२५, ४४९, ६७१, ८९०, ११०५, १३१६, १५२१, १७१९, १९१०, २०९३, २२६७, २४३१, २५८५, २७२८, २८५९, २९७७, ३०८३, ३१७६, ३२५६, ३३२१, ३३७२, ३४०९, ३४३१, ३४३८ यी ज्या हुन् ।]

## ३० प्रक्रम

### २४ वटा ज्या मान्नाको कारण

२२२ कला (३ अंश ४५ कला) देखि उठान गरी २२५, २२५ कला बढ्दै गएका २४ वटा चापका २४ वटा ज्या २९ प्रक्रममा ल्याइएका छन् । प्राचीन




[ २२ चित्र ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

आचार्यहरूले ३४३८ त्रिज्या मान्नाको कारण हामीले २७ प्रक्रममा लेखिसकेका छौं। अब हामी २४ वटा ज्या मान्नाको कारणको विषयमा विचार गर्छौं।

वृत्तको केन्द्रमा परस्पर लम्बरूप २ वटा व्यास हाल्नाले ९० अंशको चाप पाइन्छ [१ चित्र हेर्नुहोस्]। ९० अंशको चापबाट ९० अंशको पूर्णज्या पाइन्छ।

पू उ चाप ९० अंशको हो। [२२ चित्र] त्यसको पूर्णज्या पू उ रेखा हो। पू उ रेखालाई आधा गरिदियो भने ४५ अंशका ज्या र चाप पाइन्छन्। पू त रेखा ४५ अंशको ज्या हो, पू ज चाप ४५ अंशको छ। पू ज रेखा ४५ अंशको पूर्णज्या हो। पू ज रेखाका उपरमा मत्स्य बनाई *शि प* रेखा हाल्दा सो रेखाले पू ज पूर्णज्या तथा पू ज चापलाई पनि आधा गरिदिन्छ। ❀ यस कारण पू थ रेखा २२ अंश ३० कलाको ज्या हुन्छ। पू च चाप २२ अं ३० क को हुन्छ। के थ रेखाचाहिं ९० अं—२२ अं ३० क = ६७ अं ३० क को ज्या हुन्छ। च उ चाप ६७ अं ३० क को हुन्छ।

यसै गरी २२ अं ३० क को पूर्णज्यालाई आधा गर्दा ११ अं १५ क का ज्या र चाप पाइन्छन्। ११ अं १५ क बाट ७८ अं ४५ क का ज्या र चाप पाइन्छन्। ६७ अं ३० क को पूर्णज्यालाई आधा गरिदियो भने ३३ अं ४५ क का ज्या र चाप पाइन्छन्। ३३ अं ४५ क बाट ५६ अं १५ क का ज्या र चाप पाइन्छन्।

यसरी ९० अं देखि उठान गरी पूर्णज्याहरूलाई आधा आधा गर्दै जाँदा ४५ अं, २२ अं ३० क, ६७ अं ३० क, ११ अं १५ क, ७८ अं ४५ क, ३३ अं ४५ क, ५६ अं १५ क यी ७ वटा चापका ७ वटा ज्यालाई नापेर ल्याउन सकिन्छ।

वृत्तको अर्धव्यासमाथि समभुज त्रिभुज बनाउँदा ६० अंशको पूर्णज्या पाइन्छ [९ चित्र]। ६० अंशको पूर्णज्यालाई आधा गरिदियो भने ३० अंशका ज्या र चाप थाहा पाइन्छन्। ३० अंशको पूर्णज्याबाट १५ अंश र ७५ अंशका ज्या र चाप थाहा पाइन्छन्। १५ अंशबाट ७ अं ३० क र ८२ अं ३० क का ज्या र चाप, ७ अं ३० क बाट ३ अं ४५ क र ८६ अं १५ क का ज्या र चाप, ८२ अं ३० क बाट ४१ अं १५ क र ४८ अं ४५ क का ज्या र चाप थाहा पाइन्छन्। ७५ अंशको पूर्णज्याबाट ३७ अं ३० क र ५२ अं ३० क का ज्या र चाप, ३७ अं ३० क बाट १८ अं ४५ क र ७१ अं १५ क का ज्या

---

❀ मत्स्य बनाउने विधि पूर्णिमा ४ अङ्कको ९० पृष्ठमा हेर्नुहोस्। पू उ रेखालाई आधा गर्न बनाएको मत्स्यचाहिं २२ चित्रमा देखाइएको छैन।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

र चाप, ५२ अं ३० क बाट २६ अं १५ क र ६३ अं ४५ क का ज्या र चाप याहा पाइन्छन् ।

यसरी ६० अंशको पूर्णज्यादेखि उठान गरी पूर्णज्याहरूलाई आधा आधा गर्दै जाँदा ३० अं, ६० अं, १५ अं, ७५ अं, ७ अं ३० क, ८२ अं ३० क, ३ अं ४५ क, ८६ अं १५ क, ४१ अं १५ क, ४८ अं ४५ क, ३७ अं ३० क, ५२ अं ३० क, १८ अं ४५ क, ७१ अं १५ क, २६ अं १५ क र ६३ अं ४५ क यी १६ वटा चापका १६ वटा ज्यालाई नापेर ल्याउन सकिन्छ ।

यसरी ९० अंशको पूर्णज्याबाट ७ वटा र ६० अंशको पूर्णज्याबाट १६ वटा ज्यालाई नापेर ल्याउन सकिन्छ । ९० अंशको ज्या त्रिज्या हुन्छ । सो त्रिज्या आफ्नो इष्ट हुँदा २४ वटै ज्या नापी आफ्नो गणितको परीक्षा गर्न सकिने हुनाले प्राचीन आचार्यहरूले २४ वटा ज्या मानेका हुन् भन्ने कुरा स्पष्ट छ ।†

## ३१ प्रक्रम

### चापको अनुपातबाट ज्या आउन सक्तैन

पू च चाप २२ अंश ३० कलाको हो । [२३ चित्र] त्यसको ज्या च अ हो । पू झ चाप ६० अंशको छ । त्यसको ज्या झ क हो । पू ज चाप ७५ अंशको छ । त्यसको ज्या ज ग हो ।

ज थ = ज ग - थ ग = ज ग — च अ

= ७५° को ज्या — २२° ३०′ को ज्या हुन्छ ।

झ त = झ क — त क = झ क — च अ

= ६०° को ज्या — २२° ३०′ को ज्या हुन्छ ।

च ज रेखा = च ज चापको पूर्णज्या

= (७५° — २२° ३०′) को पूर्णज्या

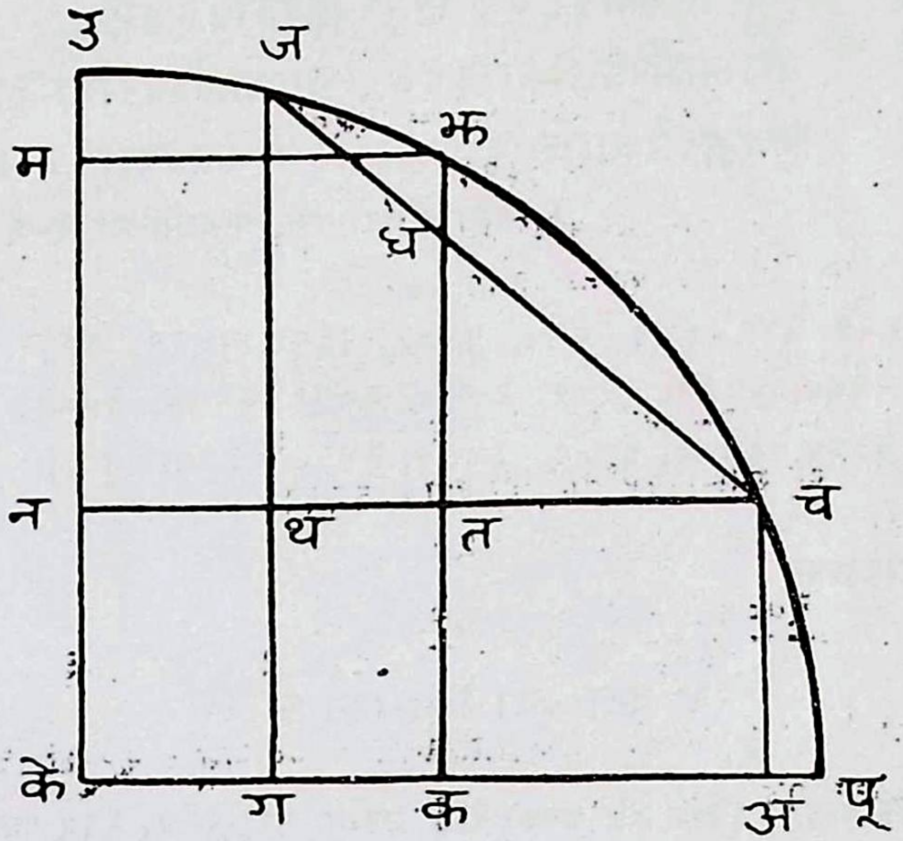
= ५२° ३०′ को पूर्णज्या हुन्छ

ज थ च तथा झ त च त्रिभुज समानकोणक छन् ।

---

† यो कुराको संक्षेप भास्करले पनि गरेका छन् । यहीं पुस्तकका ४६–५६ पृष्ठ हेर्नुहोस् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ २३ चित्र ]

त्यस कारण

च ज : ज थ :: च ध : ध त

यस्तो अनुपात बस्छ । [रेखागणित ६ अ. ४ प्र.]

अर्थात् ७५ अं र २२ अं ३० क को अन्तरको पूर्णज्याले त ७५ अं को ज्या र २२ अं ३० क को ज्याको अन्तर पाइन्छ भने च ध रेखाले ध त रेखा पाइएला, यो अनुपात रेखागणितको युक्तिबाट सिद्ध हुन्छ ।

परन्तु च ज चाप एक अवयव, ज थ रेखा एक अवयव, थ च रेखा एक अवयव भएको चापसरल त्रिभुज तथा च झ चाप एक अवयव, झ त रेखा एक अवयव, त च रेखा एक अवयव भएको चापसरल त्रिभुजमा पनि अनुपात लाग्छ भनी मानेमा च ज चापले ज थ रेखा पाइन्छ भने च झ चापले झ त रेखा पाइएला ।

अर्थात्, ७५ अं को चाप र २२ अं ३० क को चापको अन्तरले त ७५ अं को ज्या र २२ अं ३० क को ज्याको अन्तर पाइन्छ भने ६० अं को चाप र २२ अं ३० क को चापको अन्तरले ६० अं को ज्या र २२ अं ३० क को ज्याको अन्तर पाइएला, यस्तो रूप बस्न जाला ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यताबाट

$७५^{\circ}—२२^{\circ}\ ३०' = ५२^{\circ}\ ३०' = ३१५०'$

$६०^{\circ}—२२^{\circ}\ ३०' = ३७^{\circ}\ ३०' = २२५०'$

$७५^{\circ}$ को ज्या = ३३२१
$६०^{\circ}$ को ज्या = २९७७
$२२^{\circ}३०'$ को ज्या = १३१६
} [८ सारणीबाट]

यस कारण

$७५^{\circ}$ को ज्या—$२२^{\circ}३०'$ को ज्या = २००५

$६०^{\circ}$ को ज्या—$२२^{\circ}३०'$ को ज्या = १६६१

अतः, ३१५० : २००५ : : २२५० : क

$$क = \frac{२००५ \times २२५०}{३१५०} = \frac{१००२५}{७} = १४३२{\cdot}१४३ = १४३२ \text{ (आसन्न)}$$

यसरी यहाँ सकारेको अनुपातअनुसार ६० अंश र २२ अं ३० क को ज्याको अन्तर १४३२ हुन आयो । परन्तु-

$६०^{\circ}$ को ज्या—$२२^{\circ}३०'$ को ज्या = १६६१ हुन्छ ।

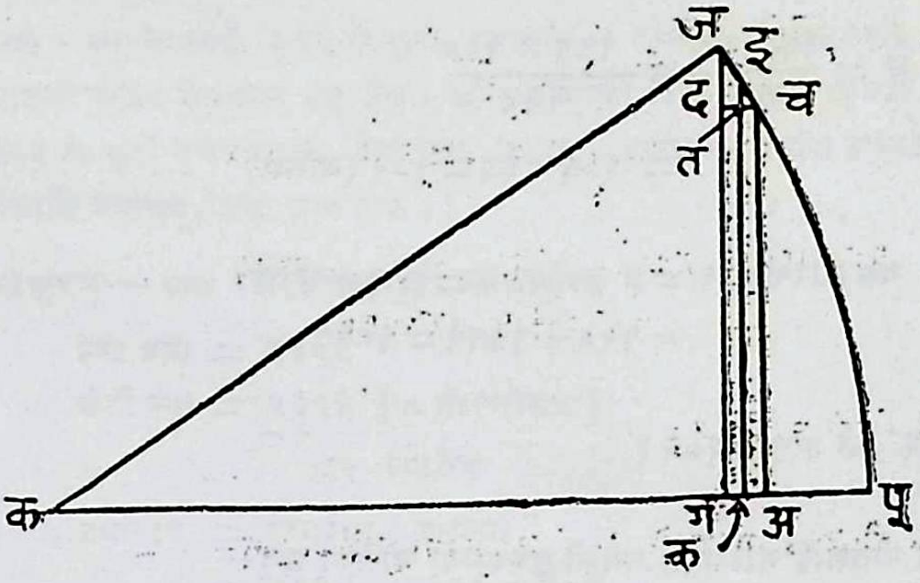
यस कारण यहाँ सकारेको यो अनुपात सर्वथा अशुद्ध हो भन्ने स्पष्ट देखिन आउँछ ।

## ३२ प्रक्रम

### ज्या र चापको अभेद भएमा चापको अनुपातबाट ज्या ल्याउँछन्

ज्याभन्दा पूर्णज्या ठूलो, पूर्णज्याभन्दा चाप ठूलो हुन्छ भनी २३ प्रक्रममा सिद्ध गरिएको छ । २२५ कला वा त्यसभन्दा सानो चाप भएमा ज्या र चापको भेद थाहा पाइँदैन भन्ने कुरो २४ प्रक्रममा सिद्ध गरिएको छ । यी दुइ सिद्धान्त-लाई मिलाई विचार गर्दा २२५ कला वा त्यसभन्दा सानो चाप भएमा पूर्णज्या र चापको भेद थाहा पाउन सकिँदैन भन्ने कुरा स्पष्ट हुन्छ । त्यस्ता ठाउँमा पूर्णज्या र चापको अभेद मानी गणितज्ञहरू चापको अनुपातबाट इष्ट अंशका चापको ज्या ल्याउने काम गर्छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ २४ चित्र† ]

पू च चाप ३० अंशको हो, त्यसको ज्या च अ हो। पू ज चाप ३३ अं ४५ क को हो, त्यसको ज्या ज ग हो। पू इ चाप ३२ अंशको हो, त्यसको ज्या इ क हो।

३० अंशको ज्या च अ १७१९ हुन्छ। ३३ अं ४५ क को ज्या ज ग १९१० हुन्छ। यी दुइ ज्या थाहा पाई ३२ अंशको ज्या इ क को मान ल्याउनुपरेको छ।

ज च चाप २२५ कलाको छ। त्यसको पूर्णज्या र चापको अभेद क्षेत्रमा देखिएको छ। इ च चाप २ अंश (=१२० कला) को छ। यहाँ पनि चाप र पूर्णज्याको अभेद देखिन्छ।

जद = जग — दग = जग — चअ = १९१० — १७१९ = १९१

ज द च तथा इ त च दुवै सरल जात्य त्रिभुज जस्ता देखिएकाले तिनलाई सरल जात्य मानी रेखागणितको ६ अ. ४ प्रतिज्ञाअनुसार अनुपात गर्दा—

जच : ज द : : इ च : इ त

---

† यस चित्रमा ठाउँ साँघुरो भएकोले त तथा क अक्षर चिनु दिई अलि पर लेखिएका छन्।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

$$\therefore \text{इ त} = \frac{\text{जद८} \times \text{इञ}}{\text{जत्व}} = \frac{\text{१९१} \times \text{१२०}}{\text{२२५}}$$

$$= \text{१०१·८६६} = \text{१०२ (आसन्न)}$$

$$\text{यस कारण इ क} = \text{इ त} + \text{त क} = \text{इ त} + \text{च ञ}$$

$$= \text{१२०} + \text{१७१९} = \text{१८२१}$$

$\therefore$ ३२° को ज्या = १८२१

यस रीतलाई भास्करले तलको सूत्ररूपमा बोलेका छन्—

तत्त्वाऽश्वि२२५भक्ता असवः कला वा
तल्लब्धसंख्या गतशिञ्जिनी सा ।
यातैष्यजीवाऽन्तरशेषघातात्
तत्त्वाऽश्वि२२५लब्ध्या सहितेप्सिता स्यात् ॥३३॥

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार ११ श्लोक)

[इष्ट चापलाई कला बनाउनू, इष्ट कला* आउँछ । इष्ट कलालाई २२५ ले भाग लिई पूर्णाङ्क लब्धि लिनू, सो लब्धि गतज्याको संख्या हुन्छ (८ सारणीमा) । सो संख्याको ज्या गतज्या हुन्छ । शेषचाहिं शेषकला कहाउंछ । गतज्यापछिं लगत्तै आउने ज्या एष्यज्या हुन्छ । गतज्या र एष्यज्याको अन्तरले शेषकलालाई गुनी गुणनफललाई २२५ ले भाग लिनू, लब्धि ज्याशेष कहाउँछ । ज्याशेषलाई गतज्यामा जोडिदिनू, इष्ट चापको ज्या हुन्छ ।]

---

*परिधिमा २१६०० कला हुन्छन् [२ प्रक्रम] । १ दिनमा ६० घडी, १ घडीमा ६० पला, १ पलामा ६ असु हुन्छन् । (सिद्धान्तशिरोमणि कालमानाध्याय १७–१८ श्लोक) यस कारण १ दिन = ६० × ६० × ६ = २१६०० असु हुन्छन् । यस कारण वृत्तको परिधिको कलाको संख्या र अहोरात्रको असुको संख्या बराबर हुन्छ । अर्थात् वृत्तलाई घटचादिरूपमा भाग लाउँदा असु कलारूपमा बस्न आउँछ । यस कारण भास्करले कला र असुलाई तुल्य मानी कला अथवा असुलाई २२५ले भाग लिनू भनी बोलेका छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

उदाहरण— २४ अंशको ज्या ल्याऊ ।

२४ अं = २४ × ६० क = १४४०क इष्टकला

२२५)१४४०(६ लब्धि
१३५०
९० शेषकला

यस कारण

एष्यज्या = सातौं ज्या = १५२१
गतज्या = छैटौं ज्या = १३१६
ज्यान्तर = २०५
[८ सारणीबाट]

$$\therefore \text{ ज्याशेष } = \frac{९० \times २०५}{२२५} = ८२$$

∴ इष्ट ज्या = गतज्या + ज्याशेष = १३१६ + ८२ = १३९८†

## १७–प्रश्नमाला

तलका चापका ज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) ५ अं | (२) १० अं | (३) १८ अं |
| (४) २० अं | (५) २५ अं | (६) ३५ अं |
| (७) ४० अं | (८) ५० अं | (९) ५५ अं |
| (१०) ६५ अं | (११) ७० अं | (१२) ८० अं |
| (१३) ८५ अं | (१४) २७ अं ५० क | (१५) ६४ अं १९ क |

† वि. सं. ६३३–९३७ को बीचमा नेपालद्रोणीमा बनेको सुमतितन्त्रमा पनि ३४३८ त्रिज्या हुँदा २४ अंशको ज्या १३९८ दिएको छ । (ताडपत्र २६ क पृष्ठ)

(नयराज पन्त, देवीप्रसाद भण्डारी, दिनेशराज पन्तद्वारा सम्पादित त्रिभुवन विश्वविद्यालयअन्तर्गतको पाठ्यक्रमविकासकेन्द्रद्वारा प्रकाशित सुमतितन्त्रको ४५ पृ.)

भास्कराचार्यहरूले भने ३४३८ त्रिज्या हुँदा २४ अंशको ज्या १३९७ दिएका छन्—

अभ्राऽङ्कविश्वे१३९७ऽत्र जिनां२४शजीवा...

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार १२ श्लोक)

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

(१) ३०० (२) ५९७ (३) १०६२ (४) ११७५
(५) १४५३ (६) १९७१ (७) २२०९ (८) २६३३
(९) २८१५ (१०) ३११४ (११) ३२२९ (१२) ३३८४
(१३) ३४२४ (१४) १६०५ (१५) ३०९७

## ३२ प्रक्रम

### इष्ट ज्या थाहा पाई इष्ट चाप ल्याउने रीति

२४ चित्रमा पू च चाप (३० अंश) को ज्या च अ (=१७१९), पू ज चाप (३३ अं ४५ क) को ज्या ज ग (=१९१०) तथा इष्ट अंशको ज्या इ क (=१८२१) थाहा पाई पू इ इष्ट चाप ल्याउनुपरेको छ ।

इ त = इ क − त क = इ क — च अ = १८२१ — १७१९ = १०२
माथि जस्तै अनुपात गर्दा—

ज द : ज च : इ त : : इ च

$$\therefore \text{इ च} = \frac{\text{ज च} \times \text{इ त}}{\text{ज द}} = \frac{२२५ \times \text{ज्याशेष}}{\text{ज्यान्तर}} = \frac{२२५ \times १०२}{१९१}$$

$= १२०{\cdot}१५७ = १२०$ (आसन्न) शेषकला = २ अं

$\therefore$ पू इ = पू च + च इ = ३० अं + २ अं = ३२ अं

यस कारण

इष्ट चाप = ३२ अं

यस रीतलाई भास्करले तलको सूत्ररूपमा बोलेका छन्—

ज्यां प्रोझ्य तत्त्वाऽश्वि२२५हताऽवशेषं
यातैष्यजीवाविवरेण भक्तम् ।
जीवा विशुद्धा यतमाऽऽत्र तद्घ्नैस्-
तत्त्वाऽश्विभिस्२२५ तत् सहितं धनुः स्यात् ॥३४॥

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार १२ श्लोक)

[इष्ट ज्याबाट घट्न सक्ने सबभन्दा ठूलो ज्या घटाउनू (८ सारणी), शेष

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

ज्याशेष कहाउँछ । घटेको ज्या गतज्या, गतज्याको लगत्तै आउने ज्या एष्यज्या हुन्छ । ज्याशेषलाई २२५ ले गुनी गतज्या र एष्यज्याको अन्तरले भाग लिनू, आएको लब्धि शेषकला कहाउँछ । जति संख्याको ज्या घटेको छ त्यो संख्यालाई २२५ ले गुनी गुणनफलमा शेषकला जोड्नू, इष्टकला आउँछ । इष्ट कलालाई अंशादि बनाउनू, इष्ट चाप हुन्छ ।]

उदाहरण— ज्या १३९८ भए चाप कति होला ?

इष्ट ज्या = १३९८

छेटौं ज्या = १३१६ [८ सारणीबाट]

८२ ज्याशेष

ज्यान्तर = एष्यज्या—गतज्या

= १५२१—१३१६ = २०५

∴ शेषकला = $\frac{८२ \times २२५}{२०५}$ = ९०

∵ गतज्याको संख्या = ६

∴ इष्ट कला = ६ × २२५ + ९० = १४४०

∴ इष्ट चाप = १४४० क = २४ अं

## १८–प्रश्नमाला

तलका ज्याका चाप ल्याऊ

| | | |
|---|---|---|
| (१) ७३० | (२) १०२० | (३) १०६२ |
| (४) १६०४ | (५) २९०६ | (६) ३४२३ |
| (७) १७३६ | (८) ३१४१ | (९) ३२१८ |
| (१०) ३३६६ | (११) ८४० | (१२) ९८८ |

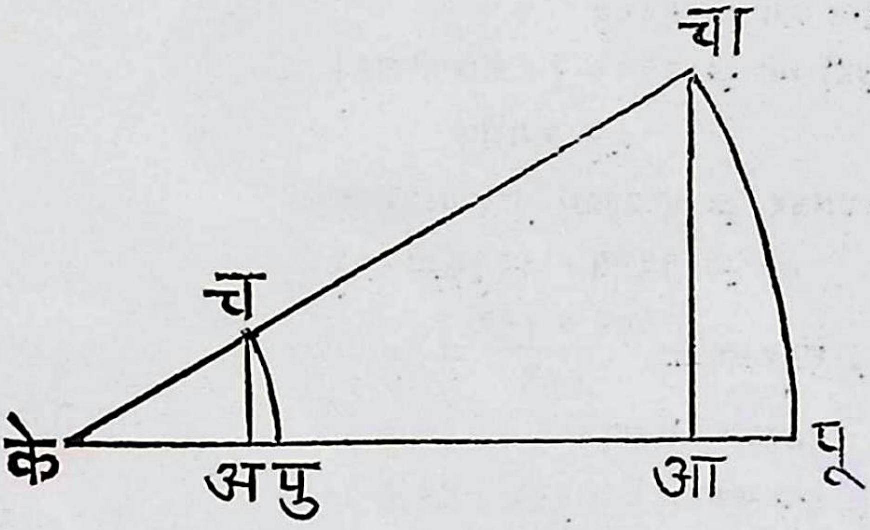
## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) १२ अं १६ क | (२) १७ अं १६ क | (३) १८ अं |
| (४) २७ अं ४९ क | (५) ५७ अं ४५ क | (६) ८४ अं ५३ क |
| (७) ३० अं २० क | (८) ६६ अं ५ क | (९) ६९ अं २८ क |
| (१०) ७८ अं १९ क | (११) १४ अं ९ क | (१२) १६ अं ४३ क |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ३४ प्रक्रम

भिन्न भिन्न त्रिज्यामा इष्ट अंशको ज्या भिन्न भिन्न हुन्छ भन्ने कुरो ७ प्रश्नमालाबाट बुझिन्छ। सो कुरो माथि नं गणितबाट देखाइएको छ तापनि क्षेत्रद्वारा त्यस विषयमा यहाँ विचार गरी ३४३८ त्रिज्यामा आएका ज्यालाई अरू अरू त्रिज्यामा परिणत गर्ने रीति बताइन्छ।




[२५ चित्र]

के पू त्रिज्या ३४३८ हो। के पु त्रिज्या १००० हो। पू चा तथा पु च दुवै चाप ३० अंशका हुन्। के पू त्रिज्यामा पू चा चापको ज्या चा आ १७१९ हुन्छ तथा के पु त्रिज्यामा पु च चापको ज्या च अ ५०० हुन्छ [१० प्रक्रमबाट]।

के आ चा तथा के अ च यी दुवै सरल जात्य समानकोणक भएका हुनाले रेखागणित ६ अ. ४ प्रतिज्ञाअनुसार अनुपात गर्दा—

$$\text{के चा} : \text{चा आ} :: \text{के च} : \text{च अ}$$

$$\therefore \text{च अ} = \frac{\text{चा आ} \times \text{के च}}{\text{के चा}} = \frac{१७१९ \times १०००}{३४३८} = ५००$$

यसबाट ३४३८ त्रिज्यामा आएका ज्यालाई इष्ट त्रिज्यामा परिणत गर्नुपर्दा ती ज्यालाई इष्ट त्रिज्याले गुनी ३४३८ले भाग लिनू, लब्धि इष्ट चापको ज्या हुन्छ भन्ने कुरो सिद्ध हुन्छ।

उदाहरण— ३४३८ त्रिज्या भएमा ६० अंशको ज्या २९७७ हुन्छ भने १२० त्रिज्या भएमा कति होला ?

$$१२० \text{ त्रिज्या भएमा ६० अंशको ज्या} = \frac{२९७७ \times १२०}{३४३८} = १०३{\cdot}२०९ = १०४ (\text{आसन्न})$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

पूर्वाऽख्यायां साधिता त्रिज्यकायाम्
इष्टा जीवा पश्चिमाऽख्यत्रिमौर्व्या ।
निघ्नी पूर्वत्रिज्यया भाजिता चेद्
इष्टज्या स्यात् पश्चिमायां त्रिमौर्व्याम् ।।३५।।

[पहिलो त्रिज्यामा ल्याएको इष्ट अंशको ज्यालाई दोस्रो त्रिज्यामा परिणत गर्नुपरेमा सो इष्टज्यालाई दोस्रो त्रिज्याले गुनी पहिलो त्रिज्याले भाग लिनू । आएको लब्धि दोस्रो त्रिज्याअनुसारको इष्ट अंशको ज्या हुन्छ ।]

उदाहरण— १ त्रिज्या भएमा २० अंशको ज्या कति होला ?

२० अं = २० × ६० क = १२०० क

२२५)१२००(५ लब्धि
  ११२५
  ७५ शेषकला

यस कारण

एष्यज्या = छैटौं ज्या = १३१६
गतज्या = पाँचौं ज्या = ११०५
ज्यान्तर = २११
} [८ सारणीबाट]

∴ ज्याशेष = $\frac{७५ \times २११}{२२५}$ = ७०·३३३... = ७० (आसन्न)

∴ इष्ट ज्या = ११०५ + ७० = ११७५

यस कारण

३४३८ त्रिज्या भएमा २० अंशको ज्या ११७५ हुन्छ ।

यसलाई १ त्रिज्यामा परिणत गर्दा—

२० अं को ज्या = $\frac{११७५ \times १}{३४३८}$ = ·३४१७६... = ·३४२ (आसन्न)

## १९–प्रश्नमाला

(१) १२० त्रिज्या भएमा ०, १०, २०, ३०, ... ९० अंशसम्मका ज्या ल्याऊ ।
(२) १ त्रिज्या भएमा ०, ५, १०, १५, ... ९० अंशसम्मका ज्या ल्याऊ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# उत्तर

(१) ०, २१, ४१, ६०, ७७, ९२, १०४, ११३, ११८, १२०। ❀
(२) ·०००, ·०८७, ·१७४, ·२५९, ·३४२, ·४२३, ·५००, ·५७३, ·६४३, ·७०७, ·७६६, ·८१९, ·८६६, ·९०६, ·९३९, ·९६६, ·९८४, ·९९६ १·०००।*

---

❀ भास्करले ३४३८ त्रिज्या हुँदा आउने ज्यालाई 'बृहज्ज्या' तथा १२० त्रिज्या हुँदा आउने ज्यालाई 'लघुज्या' भनी नाम दिएका छन्। १२० त्रिज्या हुँदा आउने ज्याका अन्तरलाई भास्करले तलको श्लोकमा दिएका छन्—

रूपाऽश्विनो२१ विंशति२०रङ्कचन्द्रा१९
अत्यष्टि१७तिथ्य१५र्क१२नवे९षु५दस्राः२।
ज्याखण्डकानि ...॥

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार १३ श्लोक)

[२१, २०, १९, १७, १५, १२, ९, ५, २ यी ज्याखण्ड (अन्तर) हुन्।]

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| अंश | ० | १० | २० | ३० | ४० | ५० | ६० | ७० | ८० | ९० |
| ज्या | ० | २१ | ४१ | ६० | ७७ | ९२ | १०४ | ११३ | ११८ | १२० |
| अन्तर | २१ | २० | १९ | १७ | १५ | १२ | ९ | ५ | २ | |

* वेङ्कटेश केतकरले १ त्रिज्या भएमा आएका दशमलव तीन स्थानसम्मका ज्यालाई 'बृहज्ज्या' तथा दशमलव दुइ स्थानसम्मका ज्यालाई 'लघुज्या' नाम राखी तलको कुरो बोलेका छन्—

ख०मश्वोरगा८७ वेदसप्तेन्दवो१७४ वै
नवाऽक्षाऽश्विनो२५९द्व्यब्धिरामास्३४२ तदग्रे।
त्रिपक्षाऽब्धयः ४२३ पञ्चशत्यो५००ऽब्धिसप्ते-
षवो५७४ रामवेदर्तवो६४३ऽश्वाऽभ्रशैलाः७०७॥
षडङ्गाऽद्रयो७६६ऽङ्केन्दुनागाः८१९ षडङ्गो-
रगाः८६६ षट्खनन्दाः९०६ खवेदग्रहाश्९४० च।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

षडङ्गग्रहाः९६६ पञ्चनागग्रहाः९८५ षण्-
नवाऽङ्काः९९६ सहस्रं१००० सहस्रां१०००शजीवाः ।।
खं०नन्दाः९ सप्तचन्द्रास्१७ तदनु रसकरा२६
वेदरामा३४ द्विवेदाः४२
पञ्चाशत्५० सप्तबाणास्५७ तदनु युगरसा६४
भूनगाः७१ सप्तशैलाः७७ ।
पक्षेभाः८२ सप्तनागा८७ उडुपतिनिधयो९१
वेदनन्दा९४ हयाऽङ्का९७
नागाऽङ्काः९८ सार्धगोऽङ्काः९९½ शत१००मिति च शतां१००-
शाऽतिमकाः स्युर् भुजज्याः ।।

(केतकीग्रहगणित त्रिप्रश्नाधिकार ११–१३ श्लोक)

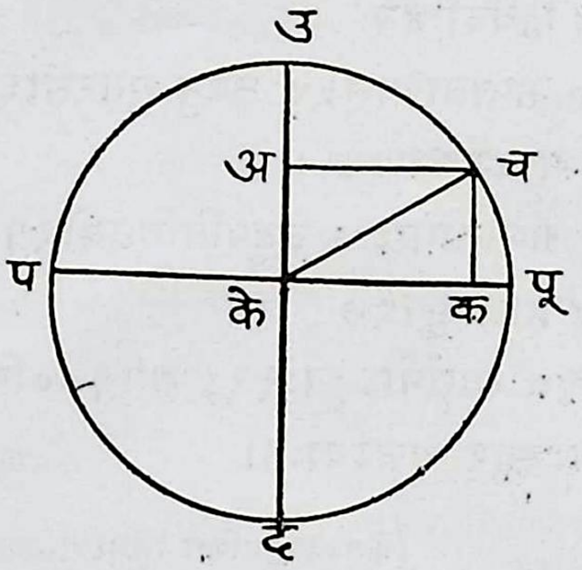
| अंश | बृहज्ज्या | लघुज्या | अंश | बृहज्ज्या | लघुज्या |
|---|---|---|---|---|---|
| ० | ·००० | ·०० | ५० | ·७६६ | ·७७ |
| ५ | ·०८७ | ·०९ | ५५ | ·८१९ | ·८२ |
| १० | ·१७४ | ·१७ | ६० | ·८६६ | ·८७ |
| १५ | ·२५९ | ·२६ | ६५ | ·९०६ | ·९१ |
| २० | ·३४२ | ·३४ | ७० | ·९४०‡ | ·९४ |
| २५ | ·४२३ | ·४२ | ७५ | ·९६६ | ·९७ |
| ३० | ·५०० | ·५० | ८० | ·९८५‡ | ·९८ |
| ३५ | ·५७४‡ | ·५७ | ८५ | ·९९६ | ·९९५ |
| ४० | ·६४३ | ·६४ | ९० | १·००० | १·०० |
| ४५ | ·७०७ | ·७१‡ | | | |

३४ प्रक्रमअनुसार अनुपात गरी दोस्रो प्रश्नको उत्तर ल्याइएका छन् । दशमलव २ स्थानसम्म (केतकरका लघुज्या) यसबाट मिल्न आएका छन् । दशमलवको तेस्रो स्थानमा (केतकरको बृहज्ज्यामा) १/१००० अंश कहीं कहीं

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## ३५ प्रक्रम

### इष्ट चापको कोटिज्या ल्याउने रीति




[२६ चित्र]

पू च चापको कोटि च उ चाप हुन्छ भनी ११ प्रक्रममा बताइएको छ। पू च चापको कोटिज्या च अ वा के क हुन्छ भनी १४ प्रक्रममा बताइएको छ। यी दुइ कुरालाई आधार मानी ८ सारणीबाट इष्टचापको कोटिज्या ल्याउने रीति यहाँ बताइन्छ।

इष्ट चापलाई ९० अंशबाट घटाई सो चापको कोटि ल्याउनू। सो कोटि-

---

(‡यस्तो चिह्न दिएको ठाउँमा) फरक पर्न गएको छ। यस्ता ठाउँमा सूक्ष्मताको लागि अन्तर्न्यासपद्धति गर्नुपर्छ भनी भास्करले बोलेका छन् (सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार १५-१७ श्लोक)। अहिले देखिएको १०७० अंशको अन्तर पनि अन्तर्न्यासपद्धतिबाट हट्न जान्छ। यस विषयमा प्राचीन र नवीन गणितको तुलना नामक पुस्तकका ९५-१५० पृष्ठमा विस्तारपूर्वक लेखिएको छ।

८५ अंशको लघुज्यामा "आधाभन्दा बढ्ता भए १ लिनू" भन्ने नियमको अनुसरण गरेमा ९० अंशको ज्या र ८५ अंशको ज्यामा फरक नदेखिने हुनाले सो देखाउन केतकरले ८५ अंशको ज्या साढेउनान्शय हुन्छ भनी बोलेका छन्।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

चापलाई कलारूप बनाई त्यसबाट ३२ प्रक्रममा बताइएको रीतअनुसार ज्या ल्याउनू। आएको सो ज्या इष्ट चापको कोटिज्या हुन्छ।

१ उदाहरण—३० अंशको कोटिज्या ल्याऊ।

३०° को कोटि = ९०° − ३०° = ६०°

६०° को ज्या = सोह्रौँ ज्या = २९७७ [८ सारणीबाट]

∴ ३०° को कोटिज्या = २९७७

२ उदाहरण—२३ अंश ३० कलाको कोटिज्या ल्याऊ।

२३°३०′को कोटि = ९०° − २३°३०′ = ६६°३०′

६६°३०′ = ६६ × ६० + ३०′ = ३९९०′

२२५)३९९०(१७ लब्धि
२२५
१७४०
१५७५
१६५ शेषकला

यस कारण

एष्यज्या = अठारौँ ज्या = ३१७६
गतज्या = सत्रौँ ज्या = ३०८३ } [८ सारणीबाट]
ज्यान्तर = ९३

∴ ज्याशेष = $\frac{१६५ \times ९३}{२२५}$ = ६८·२ = ६८ (आसन्न)

∴ ६६°३०′ को ज्या = ३०८३ + ६८ = ३१५१

यस कारण २३°३०′ को कोटिज्या = ६६°३०′ को ज्या = ३१५१

## २०—प्रश्नमाला

तलका चापका कोटिज्या ल्याऊ—

(१) १५ अं (२) २४ अं (३) ५२ अं
(४) ५७ अं (५) ११ अं ४० क (६) ३३ अं ४८ क
(७) ५७ अं ३८ क (८) ८ अं ५४ क (९) ४२ अं १२ क
(१०) २७ अं ५६ क

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

(१) ३३२१ (२) ३११३९ (३) २११६ (४) १८७२
(५) ३३६६ (६) २८५७ (७) १८४० (८) ३३९५
(९) २५४६ (१०) ३०३५

## ३६ प्रक्रम

### इष्ट कोटिज्या थाहा पाई इष्ट चाप ल्याउने रीति

इष्ट कोटिज्याबाट ३३ प्रक्रमको रीतअनुसार चाप ल्याउनू, सो कोटिचाप हुन्छ। त्यस कोटिचापलाई ९० अंशबाट घटाउनू, इष्ट चाप आउँछ।

उदाहरण— कोटिज्या ६९५ भए चाप कति होला ?

इष्ट कोटिज्या = ६९५
तेस्रो ज्या = ६७१ [८ सारणीबाट]
२४ शेष

एष्यज्या—गतज्या = ८९०−६७१ = २१९ [८ सारणीबाट]

२१९ : २२५ : : २४ : शेषकला

∴ शेषकला = $\frac{२२५ \times २४}{२१९}$ = २४·६५७ = २५ (आसन्न)

गतज्याको संख्या = ३

∴ कोटिकला = ३ × २२५ + २५ = ६७५ + २५ = ७००

∴ कोटिचाप = ७००′ = ११°४०′

∴ इष्ट चाप = ९०° — ११° ४०′ = ७८° २०′

### २१—प्रश्नमाला

तलका कोटिज्याका चाप ल्याऊ—

(१) ७४४ (२) ३११३ (३) २३०४

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

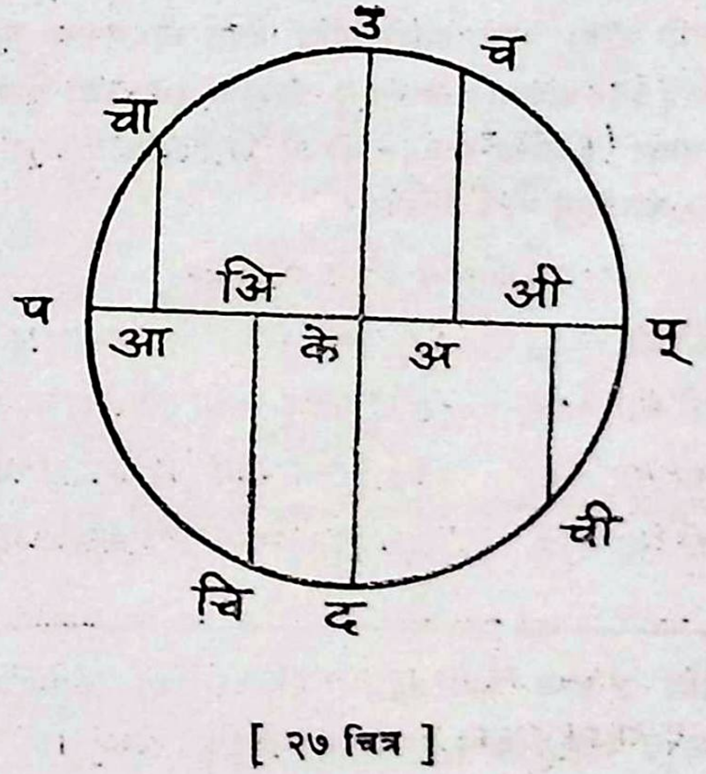
(४) २९१८ (५) १३५७ (६) ३३३८
(७) २६६२ (८) १३९७ (९) २४३८
(१०) ३३८०

## उत्तर

(१) ७७ अं ३० क (२) २५ अं २ क (३) ४७ अं ५४ क
(४) ३१ अं ५२ क (५) ६६ अं ४५ क (६) १३ अं ४५ क
(७) ३९ अं १४ क (८) ६६ अं १ क (९) ४४ अं ५० क
(१०) १० अं २६ क

## ३७ प्रक्रम

अहिलेसम्म ९० अंश वा त्यसभन्दा थोरै अंश भएका चापका ज्या कोटिज्या-को विषयमा हामीले विचार गर्‍यौं । अब ९० अंशभन्दा धेरै अंश भएका चापका ज्या कोटिज्याको विषयमा हामी विचार गर्छौं ।




[ २७ चित्र ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

"चापको एक प्रान्तमा जाने व्यासरेखाको उपरमा चापको अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्बलाई त्यस चापको 'ज्या' भन्दछन् ।" भनी माथि ३ प्रक्रममा लेखिएको हो । यताबाट पू च चापको ज्या च अ, पू चा चापको ज्या चा आ; पू चि चापको ज्या चि इ, पू ची चापको ज्या ची ई हुने स्पष्ट देखिन्छ [२७ चित्र]।

पहिलो पद (० अंशदेखि ९० अंशसम्म) ❀ मा रहेको पू च चापको ज्या च अ तथा पू उ चापको ज्या उ के देखिनाले ० अंशदेखि ९० अंशसम्म क्रमैले ज्या बढ्दै गई पू उ (९० अंश) चापको ज्या उ के त्रिज्याबराबर हुने स्पष्ट देखिन्छ ।

दोस्रो पद (९० अंशदेखि १८० अंशसम्म) मा रहेको पू चा चापको ज्या चा आ त्रिज्याभन्दा सानो देखिएकोले ९० अंशभन्दा चाप बढेमा सो चापको ज्या त्रिज्या भन्दा बढ्नाको सट्टा घट्ने स्पष्ट देखिन्छ । यसरी दोस्रो पदमा ज्या क्रमशः घट्दै गई दोस्रो पदको अन्त्यमा (१८० अंशमा) अर्थात् प बिन्दुमा पुग्दा ज्या शून्य हुने देखिन्छ । यसरी ० अंशको ज्या र १८० अंशको ज्या शून्य हुने देखिन्छ ।

तेस्रो पद (१८० अंशदेखि २७० अंशसम्म) मा रहेको पू चि चापको ज्या चि इ देखिनाले तेस्रो पदमा पहिलो पदमा जस्तै ज्या क्रमशः बढ्दै गई तेस्रो पदको अन्त्यमा (२७० अंशमा) अर्थात् द बिन्दुमा पुग्दा ज्या द के त्रिज्याबराबर हुने देखिन्छ । यताबाट ९० अंश र २७० अंशको ज्या त्रिज्याबराबर हुने देखिन्छ ।

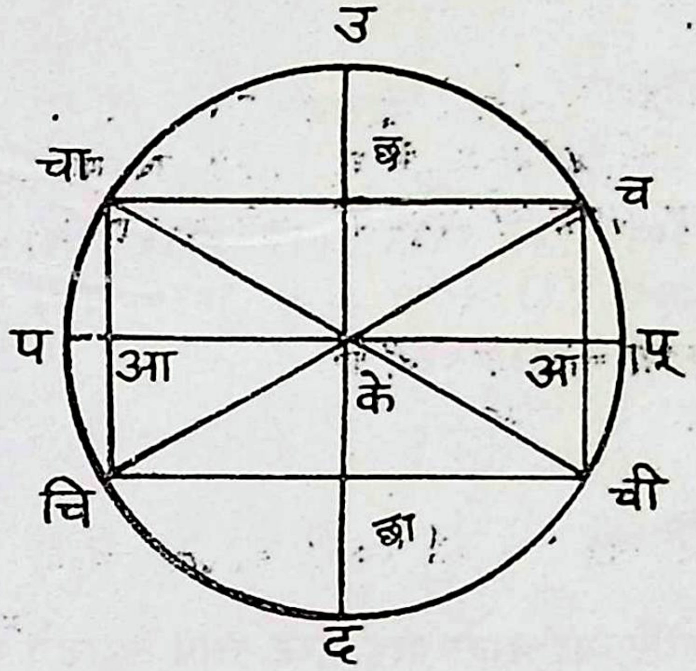
चौथो पद (२७० अंशदेखि ३६० अंश सम्म) मा रहेको पू ची चापको ज्या ची ई देखिनाले चौथो पदमा दोस्रो पदमा जस्तै ज्या क्रमशः घट्दै गई चौथो पदको अन्त्यमा (३६० अंशमा) अर्थात् पू बिन्दुमा पुग्दा ज्या शून्य हुने देखिन्छ । यस २७ चित्रबाट (० अंश र ३६० अंशको बिन्दु एउटै पू बिन्दु हुने भएकोले) ० अंश र ३६० अंश भन्नु एउटै देखिन्छ ।

यस क्षेत्रबाट देखिन आएको सार—

(१) ०° को ज्या = ०, (२) प्रथम पदमा ज्या क्रमशः बढ्दै जान्छ,
(३) ९०° को ज्या = त्रि, (४) द्वितीय पदमा ज्या क्रमशः घट्दै जान्छ,
(५) १८०° को ज्या = ०, (६) तृतीय पदमा ज्या क्रमशः बढ्दै जान्छ,
(७) २७०° को ज्या = त्रि, (८) चतुर्थ पदमा ज्या क्रमशः घट्दै जान्छ,

❀ पू देखि उ सम्म प्रथम पद, उ देखि प सम्म द्वितीय पद, प देखि द सम्म तृतीय पद. द देखि पू सम्म चतुर्थ पद हुन्छन् [१ प्रक्रम] ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ २८ चित्र ]

पू च चाप = ३०°
पू चा चाप = १५०°
पू चि चाप = २१०°
पू ची चाप = ३३०° छन् ।

पू च चापको ज्या = च अ
पू चा चापको ज्या = चा आ
पू चि चापको ज्या = चि आ
पू ची चापको ज्या = ची अ छन् ।

के च अ तथा के चा आ जात्यत्रिभुजमा
के च = के चा (त्रिज्या भएकाले)
च के अ कोण = ३०°
चा के आ कोण = १८०° - १५०° = ३०°

यस कारण
के च अ, के चा आ त्रिभुज सर्वात्मना बराबर हुन्छन् ।
[रेखागणित १ अ. २६ प्र.]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यताबाट

च अ = चा आ, के अ = के आ हुन्छन् ।

के च अ, के ची अ त्रिभुज पनि यही रीतले सर्वात्मना बराबर हुन्छन् । यसै गरी के आ चा, के आ चि त्रिभुज पनि सर्वात्मना बराबर हुन्छन् ।

यस कारण

च अ = चा आ = चि आ = ची अ

तथा के अ = के आ हुन्छन् ।

यताबाट

३०° को ज्या = १५०° को ज्या = २१०° को ज्या = ३३०° को ज्या हुने देखिन्छ ।

यस कुरालाई राम्रोसँग गडेर हेर्दा—

इष्ट चापको ज्या = इष्ट चाप घटेको १८०° को ज्या
= इष्ट चापबाट घटेको १८०° को ज्या
= ३६०° बाट घटेको इष्ट चापको ज्या हुने देखिन्छ ।

यसलाई अलि विचार गरेको खण्डमा

- इष्ट चाप पहिलो पदमा भए सो चापकै अंशको ज्या,
- इष्ट चाप दोस्रो पदमा भए सो चापलाई १८० अंशबाट घटाई शेष अंशको ज्या,
- इष्ट चाप तेस्रो पदमा भए सो चापबाट १८० अंश घटाई शेष अंशको ज्या,
- इष्ट चाप चौथो पदमा भए सो चापलाई ३६० अंशबाट घटाई शेष अंशको ज्या,

ल्याउनुपर्दो रहेछ भन्ने देखिन आउँछ ।

## ३८ प्रक्रम

ज्याको मूलबाट केन्द्रसम्म कोटिज्या रहेको हुन्छ भनी ३ प्रक्रममा लेखिएको छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यताबाट २७ चित्रमा—

पहिलो पदमा रहेको पू च चापको कोटिज्या = के अ
दोस्रो पदमा रहेको पू चा चापको कोटिज्या = के आ
तेस्रो पदमा रहेको पू चि चापको कोटिज्या = के इ
चौथो पदमा रहेको पू ची चापको कोटिज्या = के ई हुन्छन् ।

पहिलो पदमा रहेको

० अंशको कोटिज्या = के पू = त्रि
पू च चापकोकोटिज्या = के अ
पू उ (९० अंश) चापको कोटिज्या = ०

देखिनाले पहिलो पदमा क्रमशः कोटिज्या घट्दै गई पदान्तमा कोटिज्या शून्य हुने देखिन्छ ।

यसै गरी दोस्रो पदको आदिमा कोटिज्या शून्य हुने, त्यसपछि क्रमशः कोटिज्या बढ्दै गई दोस्रो पदको अन्त्यमा (१८० अंशमा) कोटिज्या त्रिज्यातुल्य हुने देखिन्छ । तेस्रो पदमा पहिलो पदमा जस्तै कोटिज्या घट्दै गई पदान्तमा (२७० अंशमा) कोटिज्या शून्य हुने देखिन्छ । चौथो पदमा चाहिं दोस्रो पदमा जस्तै कोटिज्या बढ्दै गई पदान्तमा (३६० अंशमा) कोटिज्या त्रिज्यातुल्य हुने देखिन्छ ।

२८ चित्रमा—

पू च (३०°) चापको कोटिज्या = के अ
पू चा (१५०°) चापको कोटिज्या = के आ
पू चि (२१०°) चापको कोटिज्या = के आ
पू ची (३३०°) चापको कोटिज्या = के अ

तथा

के अ = के आ देखिनाले

३०°; १५०°; २१०° र ३३०° का कोटिज्या बराबर हुने देखिन्छ ।

यसरी २८ चित्रबाट—

३०° को ज्या = च अ
३०° को कोटिज्या = केअ = छ च = ६०° को ज्या
१५०° को ज्या = चा आ = ३०° को ज्या

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१५०° को कोटिज्या = के आ = छ चा = ६०° को ज्या
२१०° को ज्या = चि आ = ३०° को ज्या
२१०° को कोटिज्या = के आ = छा चि = ६०° को ज्या
३३०° को ज्या = ची अ = ३०° को ज्या
३३०° को कोटिज्या = के अ = छा ची = ६०° को ज्या

हुने देखिन्छ ।

## ३८ प्रक्रम

९० अंशभन्दा चाप ठूला भए तापनि ज्याचाहिं त्रिज्याभन्दा बढ्ता नभई ९० अंशभित्रका चापका ज्या सरह भई रहने हुनाले र सारणीमा पनि ९० अंशसम्मका मात्र ज्या लेख्ने चलन भएकोले ज्या ल्याउन विद्वान्‌हरूले सजिलो नियम निकालेका छन् । त्यस विषयमा अब हामी बोल्दछौं ।

सारणीको प्रयोग गरी जति अंशको ज्या ल्याइन्छ, त्यति अंशलाई भुज भन्ने चलन छ ।

पहिलो पदमा जति अंशको ज्या ल्याउनुपरेको छ, त्यति अंशबाट नै ज्या ल्याइने हुनाले ती अंश नै भुज कहाउँछन् ।

दोस्रो पदमा जति अंशको ज्या ल्याउनुपरेको छ, त्यति अंशलाई १८० अंशबाट घटाई शेष अंशको ज्या ल्याउनुपर्ने हुनाले दोस्रो पदमा १८० अंशबाट घटेका इष्ट अंश भुज कहाउँछन् ।

तेस्रो पदमा जति अंशको ज्या ल्याउनुपरेको छ, त्यति अंशबाट १८० अंश घटाई शेष अंशको ज्या ल्याउनुपर्ने हुनाले तेस्रो पदमा इष्ट अंशबाट घटेका १८० अंश भुज कहाउँछन् ।

चौथो पदमा जति अंशको ज्या ल्याउनुपरेको छ, त्यति अंशलाई ३६० अंशबाट घटाई शेष अंशको ज्या ल्याउनुपर्ने हुनाले चौथो पदमा ३६० अंशबाट घटेका इष्ट अंश भुज कहाउँछन् ।

भुजको अंश घटेको ९० अंशको ज्या इष्ट अंशको कोटिज्या हुने हुनाले इष्ट अंशको भुज घटेका ९० अंश इष्ट चापको कोटि कहाउँछन् ।

यस विषयमा प्राचीन आचार्यहरूले बोलेका कुरा यी हुन्–

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

दोस्त्रि३भोनं त्रि३भोर्ध्वं विशेष्यं रसैश्६
चक्रतो१२ऽङ्का९धिकं स्याद् भुजोनं त्रि३भम् ।
कोटिरेकै१ककं१ त्रि३त्रि३भैः स्यात् पदं ...॥

(ग्रहलाघव रविचन्द्रस्पष्टाधिकार १ श्लोक)

[तीन राशि (९० अंश) भन्दा कम भए त्यही भुज हुन्छ। ३ राशिभन्दा बढ्ता भए ६ राशि (१८० अंश) सँग त्यसको अन्तर गर्नू (६ राशिभन्दा कम भए ६ राशिबाट त्यसलाई घटाउनू, ६ राशिभन्दा बढ्ता भए त्यसबाट ६ राशि घटाउनू) भुज आउँछ। ९ राशि (२७० अंश) भन्दा बढ्ता भए १२ राशि (३६० अंश) बाट त्यसलाई घटाउनू, भुज आउँछ। भुजलाई ३ राशिबाट घटाउनू, कोटि आउँछ। तीन तीन राशिको एक एक पद हुन्छ।]

त्रिभिर्३भैः पदं तानि चत्वारि४ चक्रे
क्रमात् स्याद् अयुग्युग्मसंज्ञा च तेषाम् ।
अयुग्मे पदे यातमेष्यं तु युग्मे
भुजो बाहुहीनं त्रि३भं कोटिरुक्ता ॥३६॥
ये दोःकोटयोः स्तः क्रमज्ये तदूने
त्रिज्ये ते वा कोटिदोर् उत्क्रमज्ये ।
ये दोःकोटयोर् उत्क्रमज्ये तदूने
त्रिज्ये ते वा कोटिदोष्णोः क्रमज्ये ॥३७॥
दोःकोटिज्यावर्गहीनौ त्रिभज्या-
वर्गौ मूले वा तयोः कोटिदोर्ज्ये ।

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार १९-२१ श्लोक)

अत्रोपपत्तिर् गोले कथितैव। तथाऽपि बालाऽवबोधाऽर्थं किञ्चिद् उच्यते। अत्र समायां भूमौ त्रिज्यातुल्येन कर्कटकेन वृत्तं कृत्वा भांऽशैर्३६०अङ्क्यम्। तन्मध्ये पूर्वापरां याम्योत्तरां च रेखां कृत्वा प्राच्याः सकाशात् सव्यक्रमेण किल पदानि

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

कल्प्यानि वृत्ते रेखाऽवच्छिन्नानि । तेषां क्रमेणाऽयुग्मयुग्मसंज्ञा च । अत्र प्रथमपदे प्राच्याः सकाशाद् वृत्तेऽभीष्टस्थाने बिन्दुः कार्यः । तस्य बिन्दोः प्राच्यपरायाश् च यद् अन्तरं सा दोर्ज्या । बिन्दोर् याम्योत्तरायाश् च यद् अन्तरं सा कोटिज्या । तद्धनुषी भुजकोटिसंज्ञे । यथा यथा स बिन्दुर् अग्रतश् चाल्यते तथा तथा दोर्ज्योपचीयते कोटिज्या चाऽपचीयते । पदान्तं प्राप्ते बिन्दौ कोटेर् अभावः । दोर्ज्या च व्यासार्धतुल्या स्यात् । ततो द्वितीयपदे कोटेर् उपचयः । तत्पदान्ते कोटिः परमा । भुजस्याऽभावः । अत एवोक्तम् । अयुग्मे पदे यातमेष्यं तु युग्म इति । तथाऽत्र धनुषि ज्यारूपा या सा क्रमज्या । शररूपं यद् अन्तरं सोत्क्रमज्या । बाणोनं व्यासार्धं चेतद् इतरज्यातुल्यं स्याज् जीवोनं व्यासार्धं तद् इतरबाणतुल्यं स्याद् इति वृत्तोपरि सर्वं दर्शनीयम् ।

(सिद्धान्तशिरोमणिका माथि उद्धृत श्लोकका वासनाभाष्य)

[तीन तीन राशिको एक एक पद हुन्छ । वृत्तमा चारवटा पद हुन्छन् । ती पदहरूमा पहिलो विषम, दोस्रो सम, तेस्रो विषम, चौथो सम कहाउँछन् विषम पदमा पदादिबाट जति नाघेको छ, त्यति चाप भुज कहाउँछ । सम पदमा चाहिं पदान्तमा पुग्न जति बाँकी छ, त्यति चाप भुज कहाउँछ । भुज घटेको ३ राशि कोटि कहाउँछ । भुजचाप र कोटिचापका ज्यालाई त्रिज्याबाट घटाए क्रमैले कोटि-चाप र भुजचापका उत्क्रमज्या आउँछन् । भुजचाप र कोटिचापका उत्क्रमज्यालाई त्रिज्याबाट घटाइदिए क्रमैले कोटिचाप र भुजचापका ज्या आउँछन् । अथवा भुज-चाप र कोटिचापका ज्याका वर्गलाई त्रिज्याको वर्गबाट घटाई मूल लिए क्रमैले भुजचापको कोटिज्या र कोटिचापको कोटिज्या आउँछन् ।

यसको उपपत्ति गोलमा बताइएको छ । तैपनि केटाकेटीले बुझून् भनी केही कुरा भनिन्छ । सम्म मिलेका जग्गामा त्रिज्यातुल्य कर्कटकले वृत्त बनाई त्यसको परिधिमा ३६० अंशको चिनु लाउनू । त्यसको केन्द्रमा पूर्वापर र याम्योत्तर रेखा हाली ती रेखाले छुट्याइएका वृत्तका खण्डलाई पूर्व बिन्दुदेखि सव्यक्रमले* पदको

*यहाँ सव्यक्रमले पूर्वबाट दक्षिण, दक्षिणबाट पश्चिम, पश्चिमबाट उत्तर र

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

कल्पना गर्नू। ती पदहरू क्रमैले विषम, सम, विषम, सम कहाउँछन्। त्यहाँ पहिलो पदमा पूर्वबिन्दुबाट उठान गरी परिधिमा इष्ट स्थानमा चिनु लाउनू। त्यो बिन्दु र पूर्वापर रेखाको जति अन्तर हुन्छ, त्यो ज्या कहाउँछ। त्यो बिन्दु र याम्योत्तर रेखाको जति अन्तर हुन्छ, त्यो कोटिज्या कहाउँछ। त्यस बिन्दुलाई जति जति अगाडि सार्दै लग्यो, उति उति भुजज्या (ज्या) बढ्दै जान्छ। कोटिज्याचाहिँ घट्दै जान्छ। पदान्तमा पुग्दा कोटिज्याको अभाव हुन्छ। भुजज्याचाहिँ अर्धव्यासले बराबर हुन्छ। अनि दोस्रो पदमा कोटिज्या बढ्न थाल्दछ। दोस्रो पदको अन्तमा पुगेर कोटिज्या महत्तम हुन्छ, भुजज्याको अभाव हुन्छ। यसै कारणले "विषम पदमा पदादिबाट जति नाघेको छ, त्यति चाप भुज कहाउँछ, सम पदमा चाहिँ पदान्तमा पुग्न जति बाँकी छ, त्यति चाप भुज कहाउँछ" भनी भनिएको हो। यहाँ चापमा ताँदो जस्तो भएर जो रहेको छ, त्यो क्रमज्या (ज्या) कहाउँछ। बाण (शर) जस्तो भएर जो रहेको छ त्यो उत्क्रमज्या कहाउँछ। शर घटेको अर्धव्यास अर्को ज्या हुन्छ। ज्या घटेको अर्धव्यासचाहिँ अर्को शर हुन्छ भन्ने सबै कुरा वृत्तमा हेर्नु देखाउनुपर्छ।]

१ उदाहरण— इष्ट चाप १३५ अंश भए भुज कति होला ?

इष्ट चाप दोस्रो पदमा भएको हुनाले भुज $=१८०^\circ - १३५^\circ = ४५^\circ$

---

उत्तरबाट पूर्व क्रमले पद लिनुपर्छ भनी भास्करले बोलेका छन्। अर्थात् २६ चित्रमा पू देखि द सम्म प्रथम पद, द देखि प सम्म द्वितीय पद, प देखि उ सम्म तृतीय पद, उ देखि पू सम्म चतुर्थ पद हुन्छ भन्ने भास्करको लेखाइबाट बुझिन्छ। यसरी नै लेख्नुपर्छ भन्ने विशेष कुनै नियम नहुनाले 'प्राच्याः सकाशात् सव्यक्रमेण किल पदानि कल्प्यानि' भनी भास्करले 'किल' शब्द प्रयोग गरेको देखिन्छ। सिद्धान्तशिरोमणिका पुस्तकहरूमा २६ चित्रमा उ बिन्दु लेखिएको ठाउँमा पूर्वपदादि (पू बिन्दु) लेखी त्यहींबाट सव्यक्रमले पदको उठान गरी ज्या-कोटिज्या लेखिएका देखिन्छन्। उच्चबाट पदको गणना गर्न तथा उच्चबाट ग्रह घटाई केन्द्रको गणना गर्न सजिलो पार्नाको लागि यसो गरिएको हो भन्ने देखिन्छ। यस कुरालाई ग्रहगणितको विषयमा पुगेर मात्र हामी खुलाएर लेख्न सक्छौं।

पदको यहींबाट उठान गर्नुपर्छ भन्ने विशेष नियम नभएको र भास्करले पनि विशेष किटान नगरेका तथा बापूदेव शास्त्रीले पनि आफ्नो त्रिकोणमितिमा २६ चित्रको अनुसारले पदको व्यवहार गरेका हुनाले हामीले त्यसै गरेका हौं।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

२ उदाहरण— इष्ट चाप ८ रा १० अं १५ क भए कोटि कति होला ?

इष्ट चाप = ८ रा १० अं १५ क = २५०° १५'

∴ भुज = २५०° १५' — १८०° = ७०° १५'

∴ इष्ट कोटि = ९०° — ७०° १५' = १९° ४५' ❀

## २२–प्रश्नमाला

तलका चापका भुज ल्याऊ—

(१) १२० अं (२) १३६ अं (३) १७५ अं
(४) २०० अं (५) २३५ अं (६) २७५ अं
(७) २२५ अं १० क (८) १८७ अं ५६ क (९) ३२० अं २४ क
(१०) १९२ अं २७ क १९ वि (११) २७६ अं १८ क २२ वि

तलका चापका कोटि ल्याऊ—

(१२) १२० अं (१३) २१० अं (१४) ३०० अं
(१५) २०० अं २० क (१६) १३६ अं ५४ क २२ वि (१७) ३३५अं ४५क ५०वि
(१८) १९८ अं २५ क ३० वि (१९) ३५५ अं ३० क १५ वि (२०) १७५अं ०क ५वि

## उत्तर

(१) ६० अं (२) ४४ अं (३) ५ अं
(४) २० अं (५) ५५ अं (६) ८५ अं
(७) ४५ अं १० क (८) ७ अं ५६ क (९) ३९ अं ३६ क
(१०) १२ अं २७ क १९ वि (११) ८३ अं ४१ क ३८ वि (१२) ३० अं
(१३) ६० अं (१४) ३० अं (१५) ६९ अं ४० क

---

❀ इष्ट चाप प्रथम पदमा भए ९० अंशबाट इष्ट चाप घटाउनू, कोटि आउँछ; इष्ट चाप दोस्रो पदमा भए इष्ट चापबाट ९० अंश घटाउनू, कोटि आउँछ; इष्ट चाप तेस्रो पदमा भए २७० अंशबाट इष्ट चाप घटाउनू, कोटि आउँछ; इष्ट चाप चौथो पदमा भए इष्ट चापबाट २७० अंश घटाउनू, कोटि आउँछ भन्ने कुरा सम्झी कोटि ल्याउने गरे सजिलो पर्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(१६) ४६ अं ५४ क २२ वि (१७) ६५ अं ४५ क ५० वि (१८) ७१अं ३४क ३०वि
(१९) ८५ अं ३० क १५ वि (२०) ८५ अं ० क ५ वि

## ४० प्रक्रम

९० अंशभन्दा ठूलो चापको ज्या ल्याउनुपरेमा ३९ प्रक्रमको रीतअनुसार सो चापको भुज बनाई सो भुजबाट ३२ प्रक्रमको रीतअनुसार ज्या ल्याउनुपर्छ।

९० अंशभन्दा ठूलो चापको कोटिज्या ल्याउनुपरेमा ३९ प्रक्रमको रीत-अनुसार सो चापको कोटि बनाई सो कोटिचापबाट ३२ प्रक्रमको रीतअनुसार ज्या ल्याउनुपर्छ ।

१ उदाहरण— १३५ अंशको ज्या ल्याऊ ।

१३५ अंशको भुज = १८०° — १३५° = ४५°

भुजचापको ज्या = ४५° को ज्या = २४३१ [८ सारणीबाट]

∴ १३५° को ज्या = २४३१

२ उदाहरण— ३४५ अंशको कोटिज्या ल्याऊ ।

३४५ अंशको भुज = ३६०° — ३४५° = १५°

कोटि = ९०° — १५° = ७५°

वा कोटि = ३४५° — २७०° = ७५°

कोटिचापको ज्या = ७५° को ज्या = ३३२१ [८ सारणीबाट]

∴ ३४५° को कोटिज्या = ३३२१

## २३—प्रश्नमाला

तलका चापका ज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) १२० अं | (२) २३५ अं | (३) ३३० अं |
| (४) १६५ अं | (५) २०४ अं | (६) १६७ अं ४४ क |
| (७) २१० अं २० क | (८) २९३ अं ५५ क | (९) २२५ अं २५ क |
| (१०) २१५ अं ३० क | (११) ३३३ अं ३३ क | (१२) ३४५ अं ५१ क |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

तलका चापका कोटिज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१३) १५० अं | (१४) २४० अं | (१५) २७५ अं |
| (१६) २२० अं | (१७) २०५ अं ४१ क | (१८) २९७ अं ५० क |
| (१९) ३३६ अं ३० क | (२०) १४७ अं ४५ क | (२१) ३४८ अं २० क |

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) २९७७ | (२) २८१५ | (३) १७१९ |
| (४) ८९० | (५) १३९८ | (६) ७३० |
| (७) १७३६ | (८) ३१४१ | (९) २४४८ |
| (१०) १९९५ | (११) १५३२ | (१२) ८४० |
| (१३) २९७७ | (१४) १७१९ | (१५) ३०० |
| (१६) २६३३ | (१७) ३०९७ | (१८) १६०५ |
| (१९) ३१५१ | (२०) २९०६ | (२१) ३३६६ |

## ४१ प्रक्रम

"पूर्वपतादि र ज्यामूलको बीचको भाग (पूर्वापर व्यासको टुक्रो) लाई त्यस चापको 'उत्क्रमज्या' भन्दछन्" तथा "त्रिज्याबाट कोटिज्या घटायो भने उत्क्रमज्या आउँछ" भनी ५ प्रक्रममा लेखिएको हो । यी दुइ कुरालाई आधार मानी इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने विषयमा अब हामी विचार गर्छौं ।

६०° को उत्क्रमज्या = त्रि—६०° को कोटिज्या
= त्रि—३०° को ज्या
= ३४३८—१७१९ = १७१९

यही रीतबाट २४ वटा चापका उत्क्रमज्या ल्याउन सकिन्छ ।

पहिलो (३° ४५' को) उत्क्रमज्या = त्रि—३°४५' को कोटिज्या
= त्रि—८६°१५' को ज्या
= ३४३८—३४३१ = ७ [८ सारणीबाट]

यसै गरी २४ वटै चापका उत्क्रमज्या ल्याई तलको सारणीमा दिइएका छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# ९ सारणी

त्रिज्या = ३४३८

| क्रमसंख्या | चाप अंक | उत्क्रमज्या | अन्तर | क्रमसंख्या | चाप अंक | उत्क्रमज्या | अन्तर |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| पहिलो | ३।४५ | ७ | | तेह्रौं | ४८।४५ | ११७१ | |
| | | | २२ | | | | १७४ |
| दोस्रो | ७।३० | २९ | | चौधौं | ५२।३० | १३४५ | |
| | | | ३७ | | | | १८३ |
| तेस्रो | ११।१५ | ६६ | | पन्ध्रौं | ५६।१५ | १५२८ | |
| | | | ५१ | | | | १९१ |
| चौथो | १५।०० | ११७ | | सोह्रौं | ६०।०० | १७१९ | |
| | | | ६५ | | | | १९८ |
| पाँचौं | १८।४५ | १८२ | | सत्रौं | ६३।४५ | १९१७‡ | |
| | | | ८० | | | | २०५ |
| छैंटौं | २२।३० | २६२‡ | | अठारौं | ६७।३० | २१२२‡ | |
| | | | ९३ | | | | २११ |
| सातौं | २६।१५ | ३५५‡ | | उन्नाईसौं | ७१।१५ | २३३३ | |
| | | | १०६ | | | | २१५ |
| आठौं | ३०।०० | ४६१ | | बीसौं | ७५।०० | २५४८ | |
| | | | ११८ | | | | २१९ |
| नवौं | ३३।४५ | ५७९ | | एक्काईसौं | ७८।४५ | २७६७ | |
| | | | १३१ | | | | २२२ |
| दशौं | ३७।३० | ७१० | | बाईसौं | ८२।३० | २९८९ | |
| | | | १४३ | | | | २२४ |
| एघारौं | ४१।१५ | ८५३ | | तेईसौं | ८६।१५ | ३२१३ | |
| | | | १५४ | | | | २२५ |
| बाह्रौं | ४५।०० | १००७ | | चौबीसौं | ९०।०० | ३४३८ | |
| | | | १६४ | | | | |
| तेह्रौं | ४८।४५ | ११७१ | | | | | |

‡ ८ सारणीमा ज्यामा अलिकति संशोधन गरिएको थियो। त्यसबाट उत्क्रमज्यामा पनि अलिकति संशोधन गर्न आवश्यक हुन आयो र यहाँ सोही-अनुसार गरिएको छ। भास्करले छैंटौं उत्क्रमज्या २६१, सातौं ३५४, सत्रौं १९१८, अठारौं २१२३ दिएका छन्।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

माथि आएका २४ वटा उत्क्रमज्यालाई भास्करले तलका श्लोकमा बोलेका छन्—

...अथोत्क्रमज्या मुनयो७ऽङ्कदस्राः२९† ।
रसर्तवो६६ भूधरभूमिचन्द्रा ११७
द्व्यष्टेन्दवो१८२ दोरसलोचनानि२६२* ।
पञ्चेषुरामाः३५५* शशिषट्कवेदा४६१
नन्दाऽद्रिबाणा५७९ गगनेन्दुशैलाः७१० ।।३८।।

गुणेषुनागा८५३ नगखाऽभ्रचन्द्राः१००७
कुशैलरुद्राः ११७१ शरवेदविश्वे१३४५ ।
भुजङ्गनेत्रेषुभुवो१५२८ नवेन्दु-
सप्तेन्दवः१७१९ शैलकुनन्दचन्द्राः१९१७*।।३९।।

द्विसूर्यनेत्रा२१२२*ण्यमरत्रिदस्रा२३३३
वस्वब्धितत्त्वानि२५४८ नगर्तुभानि२७६७ ।
गोऽष्टाऽङ्कदस्रा२९८९ दहनेन्दुदन्ता३२१३
नागाऽग्निवेदाऽज्यभुजस्३४३८त्रिभज्या ।।४०।।

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार६–९ श्लोक)

[ ७, २९, ६६, ११७, १८२, २६२, ३५५, ४६१, ५७९, ७१०, ८५३, १००७, ११७१, १३४५, १५२८, १७१९, १९१७, २१२२, २३३३, २५४८, २७६७, २९८९, ३२१३, ३४३८ यी उत्क्रमज्या हुन् । त्रिज्या ३४३८ हो ।]

---

† माथि २१ प्रक्रममा ग्रहलाघव तथा खण्डखाद्यकका श्लोक उद्धरण गरिएका छन् । ती श्लोक पूरा नभएका हुनाले श्लोकसंख्यामा तिनलाई समावेश गरिएको थिएन । ३९ प्रक्रममा ग्रहलाघवको श्लोक उद्धरण गरिएको छ, सो पूरा छैन । यस कारण त्यहाँ श्लोकसंख्या दिइएको छैन ।

यो पाउ २९ प्रक्रमको ३२ श्लोकको बाँकी भाग हो ।

* यहाँ संशोधित पाठ दिइएको छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

४२ प्रक्रम

## पहिलो पदमा रहेको इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने रीति

इष्ट चापलाई कलारुप बनाई सो कलाबाट ३२ प्रक्रममा बताइएको रीत-अनुसार ९ सारणी उपयोग गरी उत्क्रमज्या ल्याउनुपर्छ ।

उदाहरण— २३ अंश ३० कलाको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

$$२३^{\circ}\ ३०' = २३ \times ६० + ३०'$$
$$= १४१० \text{ क}$$

२२५)१४१०(६ गत उत्क्रमज्याको संख्या*
     १३५०
     ६० शेषकला

यस कारण

एष्य उत्क्रमज्या = सातौं उत्क्रमज्या = ३५५
गत उत्क्रमज्या = छैटौं उत्क्रमज्या = २६२    [९ सारणीबाट]
अन्तर = ९३

२२५ : ९३ :: ६० : उत्क्रमज्याशेष

$$\therefore \text{उत्क्रमज्याशेष} = \frac{६० \times ९३}{२२५} = २४{\cdot}८ = २५ \text{ (आसन्न)}$$

$$\therefore \text{इष्ट उत्क्रमज्या} = \text{गत उत्क्रमज्या} + \text{उत्क्रमज्याशेष}$$
$$= २६२ + २५ = २८७$$

---

*९ सारणीमा हेर्दा इष्ट चाप २३ अं ३० क भन्दा कम भई सबभन्दा नजीक रहेको २२ अं ३० क को उत्क्रमज्या २६२ तथा अन्तर ९३ स्पष्ट देखिन्छ । श्लोक घोकी सारणी नहेरी काम गर्ने अभ्यास बसाउन प्राचीन आचार्यहरुले इष्ट चापका कला बनाई त्यसलाई २२५ ले भाग लिने रीति लेखेका हुन् । सारणी हेरी काम गर्दा इष्ट चापका कला बनाई त्यसलाई २२५ ले भाग लिने काम नगरे हुन्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## २४–प्रश्नमाला

तलका चापका उत्क्रमज्या ल्याऊ—

(१) २४ अं (२) ५५ अं (३) ६६ अं
(४) २७ अं ५५ क (५) ६२ अं १० क (६) ८ अं ५४ क
(७) ७४ अं ४४ क (८) ४७ अं ४९ क (९) ७७ अं ३० क
(१०) ८२ अं ५२ क

## उत्तर

(१) २९९ (२) १४६७ (३) २०४०
(४) ४०२ (५) १८३३ (६) ४३
(७) २५३३ (८) ११३० (९) २६९४
(१०) ३०११

## ४२ प्रक्रम—

### इष्ट उत्क्रमज्या थाहा पाई इष्ट चाप ल्याउने रीति

इष्ट उत्क्रमज्याबाट ३३ प्रक्रमको रीतअनुसार ९ सारणी उपयोग गरी इष्ट चाप ल्याउनुपर्छ।

उदाहरण— उत्क्रमज्या २७४३ भए चाप कति होला ?

इष्ट उत्क्रमज्या = २७४३

बीसौं उत्क्रमज्या = २५४८

१९५ शेष

एष्य उत्क्रमज्या—गत उत्क्रमज्या = २७६७–२५४८ = २१९

[९ सारणीबाट]

२१९ : २२५ : : १९५ : शेषकला

$$\therefore \text{शेषकला} = \frac{२२५ \times १९५}{२१९} = २००\text{·}३४२ = २०० \text{ (आसन्न)}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

गत उत्क्रमज्याको संख्या = २०

∴ इष्ट कला = २० × २२५* + २०० = ४५०० + २०० = ४७००

∴ इष्ट चाप = ४७००' = ७८° २०'

## २५–प्रश्नमाला

तलका उत्क्रमज्याका चाप ल्याऊ—

(१) ११७ (२) ३६० (३) ५२०
(४) २०४० (५) १००० (६) १४१८
(७) १९८५ (८) ८४० (९) १८०७
(१०) ३२०१

## उत्तर

(१) १५ अं (२) २६ अं २६ क (३) ३१ अं ५३ क
(४) ६६ अं (५) ४४ अं ५० क (६) ५४ अं
(७) ६५ अं (८) ४० अं ५५ क (९) ६१ अं ४० क
(१०) ८६ अं २ क

४४ प्रक्रम—

## पहिलो पदमा रहेको इष्ट चापको कोटचुत्क्रमज्या ल्याउने रीति

"कोटिज्याको मूल बिन्दुबाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दुसम्म रहेको

*इष्ट उत्क्रमज्या २७४३ भन्दा कम भई सबमन्दा नजीकै रहेको उत्क्रमज्या २५४८ को चाप ७५ अं तथा अन्तर २१९ सारणीमा स्पष्ट देखिन्छ । यस कारण सारणी हेरी काम गर्दा गतज्याको संख्यालाई २२५ ले गुन्ने काम नगरे हुन्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

याम्योत्तरव्यासको टुक्रोलाई त्यस चापको 'कोटच्युत्क्रमज्या' भन्दछन् ।" तथा "त्रिज्याबाट ज्या घटाइदियो भने कोटच्युत्क्रमज्या बाँकी रहन्छ ।" भनी १५ प्रक्रमा लेखिएको छ ।*

यी दुइ कुरालाई आधार मानी इष्ट चापको कोटच्युत्क्रमज्या ल्याउने विषयमा अब हामी विचार गर्छौं ।

६०° को कोटच्युत्क्रमज्या = त्रि—६०° को ज्या
= त्रि—३०° को कोटिज्या

त्रि—३०° को कोटिज्या = ३०° को उत्क्रमज्या हुन्छ ।

∴ ६०° को कोटच्युत्क्रमज्या = ३०° को उत्क्रमज्या
= (९०°-६०°) को उत्क्रमज्या

यस कारण जति चापको कोटच्युत्क्रमज्या ल्याउनुपरेको छ, त्यस चापलाई ९० अंशबाट घटाई कोटि बनाउनू । सो कोटिचापबाट ९ सारणी उपयोग गरी ३२ प्रक्रमको रीतअनुसार उत्क्रमज्या ल्याउनू । सो उत्क्रमज्या इष्ट चापको कोटच्युत्क्रमज्या हुन्छ ।

उदाहरण—२४ अंशको कोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ ।

२४° को कोटि = ९०°-२४° = ६६°

४२ प्रक्रमको टिप्पणीअनुसार—

६६° भन्दा कम भई सबभन्दा नजीक रहेको चाप = ६३° ४५'

६३° ४५' को उत्क्रमज्या = १९१७

अन्तर = २०५ [९ सारणीबाट]

६६°-६३° ४५' = २°१५' = १३५'

२२५ : २०५ :: १३५ : उत्क्रमज्याशेष

$$\therefore \text{उत्क्रमज्याशेष} = \frac{१३५ \times २०५}{२२५} = १२३$$

∴ ६६° को उत्क्रमज्या = १९१७ + १२३ = २०४०

∴ २४° को कोटच्युत्क्रमज्या = ६६° को उत्क्रमज्या = २०४०

---

* २८ चित्रमा छ उ लाई पू च चापको कोटच्युत्क्रमज्या भन्छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## २६–प्रश्नमाला

तलका चापका कोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ—

(१) ७० अं (२) ६५ अं ३० क (३) ५५ अं
(४) ३० अं २० क (५) ५६ अं ४५ क (६) ११ अं ४० क
(७) ७८ अं २० क (८) ६२ अं ४ क (९) ४२ अं ११ क
(१०) १३ अं ४५ क

## उत्तर

(१) २०९ (२) ३१२ (३) ६२३ (४) १७०२
(५) ५६३ (६) २७४३ (७) ७२ (८) ४०३
(९) ११३० (१०) २६२१

## ४५ प्रक्रम

### कोटच्युत्क्रमज्या थाहा पाई इष्ट चाप ल्याउने रीति

इष्ट कोटच्युत्क्रमज्याबाट ३३ प्रक्रमको रीतअनुसार ९ सारणी उपयोग गरी चाप ल्याउनू, सो कोटिचाप हुन्छ। त्यस कोटिचापलाई ९० अंशबाट घटाउनू, इष्ट चाप आउँछ।

उदाहरण— कोटच्युत्क्रमज्या ६२३ भए चाप कति होला ?

४३ प्रक्रमको टिप्पणीअनुसार—

इष्ट कोटच्युत्क्रमज्या = ६२३

इष्ट कोटच्युत्क्रमज्याभन्दा कम भई
सबभन्दा नजीकै रहेको उत्क्रमज्या = ५७९ यसको चाप = ३३° ४५'

४४ शेष

अन्तर = १३१ [९ सारणीबाट]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१३१ : २२५ :: ४४ : शेषकला

$\therefore$ शेषकला $= \frac{२२५ \times ४४}{१३१} =$ ७५·५७२ = ७६ (आसन्न) = १° १६'

कोटिचाप = ३३° ४५' + १° १६' = ३५° १'

यस कारण दृष्ट चाप = ९०° − ३५° १' = ५४° ५९'

## २७–प्रश्नमाला

तलका कोटयुत्क्रमज्याका चाप ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) ५४ | (२) ३२४ | (३) ८०५ |
| (४) ११०० | (५) १९९९ | (६) १६२० |
| (७) १७८५ | (८) २८७८ | (९) २२२ |
| (१०) १४०६ | (११) २०४० | (१२) २३७६ |

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) ७९ अं ५८ क | (२) ६५ अं | (३) ५० अं १ क |
| (४) ४२ अं ५२ क | (५) २४ अं ४५ क | (६) ३१ अं ५७ क |
| (७) २८ अं ४५ क | (८) ९ अं २२ क | (९) ६९ अं २२ क |
| (१०) ३६ अं १५ क | (११) २४ अं | (१२) १८ अं |

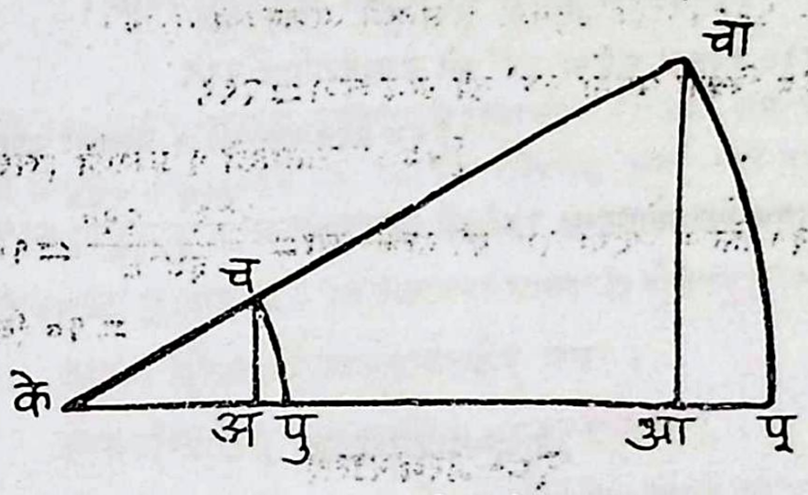
## ४६ प्रक्रम

### एउटा त्रिज्यामा आएको उत्क्रमज्यालाई अर्को त्रिज्यामा परिणत गर्ने रीति

के $पू$ = ठूलो त्रिज्या = के चा [२९ चित्र]

आ $पू_१$ = सो ठूलो त्रिज्यामा आएको चा के $पू_१$ अंशको उत्क्रमज्या

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ २९ चित्र ]

के पु = सानो त्रिज्या = के च

अ पु = सो सानो त्रिज्यामा आएको चा के पू अंशको उत्क्रमज्या

∵ चा के आ, च के अ त्रिभुज सजातीय भएकाले

$$\frac{\text{के आ}}{\text{के चा}} = \frac{\text{के अ}}{\text{के च}}$$ [रेखागणित ६ अ.४ प्र.]

के आ = के पू — आ पू, के अ = के पु — अ पु

$$\therefore \frac{\text{के पू — आ पू}}{\text{के चा}} = \frac{\text{के पु — अ पु}}{\text{के च}}$$

$$\text{वा} \quad \frac{\text{के चा — आ पू}}{\text{के चा}} = \frac{\text{के च — अ पु}}{\text{के च}}$$

छेदगमबाट

∴ के च. के चा — के च. आ पू = के च. के चा — के चा. अ पु

∴ पक्षान्तरानयन गर्दा

के चा. अ पु = के च. आ पू

$$\therefore \text{अ पु} = \frac{\text{के च. आ पू}}{\text{के चा}}$$

यस कारण एउटा त्रिज्यामा आएको ज्यालाई अर्को त्रिज्यामा परिणत गर्न [३४ प्रक्रममा] जसरी अनुपात गरिएको थियो, त्यसरी नै अनुपात गरी एउटा त्रिज्यामा आएको उत्क्रमज्यालाई अर्को त्रिज्यामा परिणत गर्न सकिन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

उदाहरण— १२० त्रिज्या भएमा २४ अंशको उत्क्रमज्या ल्याऊ।

३४३८ त्रिज्या भएमा २४° को उत्क्रमज्या = २९९

[२४ प्रश्नमालाको १ प्रश्नको उत्तरबाट]

$$\therefore \text{१२० त्रिज्या भएमा २४° को उत्क्रमज्या} = \frac{२९९ \times १२०}{३४३८} = १०\cdot४३६$$

$$= १० \text{ (आसन्न)}$$

## २८–प्रश्नमाला

१२० त्रिज्या भएमा ०, १०, २०, ३०, ··· ९० अंशसम्मका चापका उत्क्रमज्या ल्याऊ।

### उत्तर

०, २, ७, १६, २८, ४३, ६०, ७९, ९९, १२०।

## ४७ प्रक्रम

२८ प्रश्नमालाका उत्तरलाई विचार गर्दा

१२० त्रिज्या भएमा

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| अंश | ० | १० | २० | ३० | ४० | ५० | ६० | ७० | ८० | ९० |
| उत्क्रमज्या | ० | २ | ७ | १६ | २८ | ४३ | ६० | ७९ | ९९ | १२० |
| अन्तर | | २ | ५ | ९ | १२ | १५ | १७ | १९ | २० | २१ |

यस्तो रूप बस्न आउँछ।

१२० त्रिज्या भएमा १०,१० अंश फरक पारी आएका ज्या र तिनका अन्तर (खण्ड) लाई हामीले ३४ प्रक्रमको टिप्पणीमा दिएका थियौं। तिनलाई र अहिले आएका उत्क्रमज्या तथा तिनका अन्तरलाई क्रमैसँग लेख्ता तलको सारणी बन्दछ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## १० सारणी

| अंश | ज्या | अन्तर | उत्क्रमज्या | अन्तर |
|---|---|---|---|---|
| ० | ० | | ० | |
| | | २१ | | २ |
| १० | २१ | | २ | |
| | | २० | | ५ |
| २० | ४१ | | ७ | |
| | | १९ | | ९ |
| ३० | ६० | | १६ | |
| | | १७ | | १२ |
| ४० | ७७ | | २८ | |
| | | १५ | | १५ |
| ५० | ९२ | | ४३ | |
| | | १२ | | १७ |
| ६० | १०४ | | ६० | |
| | | ९ | | १९ |
| ७० | ११३ | | ७९ | |
| | | ५ | | २० |
| ८० | ११८ | | ९९ | |
| | | २ | | २१ |
| ९० | १२० | | १२० | |

यस सारणीलाई विचार गर्दा ज्याका अन्तर (खण्ड) लाई नै उल्टो क्रमले राख्ता उत्क्रमज्याका अन्तर (खण्ड) हुँदा रहेछन् भन्ने देखिन आउँछ ।

यस कुरालाई क्षेत्रबाट पनि सिद्ध गर्न सकिन्छ ।

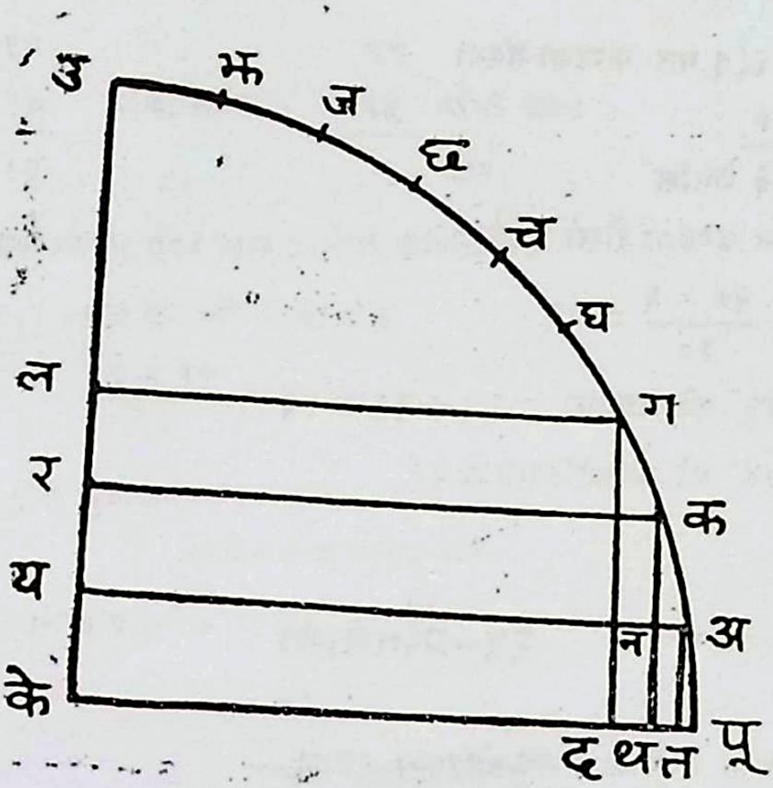
जस्तै—

प$_{१}$ अ = अ क = क ग = ··· = ज झ = झ उ = १०° [३० चित्र]

त प$_{१}$ = प$_{१}$ अ चापको उत्क्रमज्या = १०° को उत्क्रमज्या

अ य = उ अ चापको ज्या = ८०° को ज्या

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ ३० चित्र ]

त पू = के पू — के त = के पू — अ य = त्रि — ८०° को ज्या

= ९०° को ज्या — ८०° को ज्या

∴ १०° को उत्क्रमज्या = ९०° को ज्या — ८०° को ज्या

थ त = थ पू — त पू = पू क चापको उत्क्रमज्या — पू अ चापको उत्क्रमज्या

= २०° को उत्क्रमज्या — १०° को उत्क्रमज्या

फेरि, थ त = न अ = अ य — न य = अ य — क र

= ८०° को ज्या — ७०° को ज्या

∴ २०° को उत्क्रमज्या — १०° को उत्क्रमज्या

= ८०° को ज्या - ७०° को ज्या

यसै गरी ३०° को उत्क्रमज्या - २०° को उत्क्रमज्या = द थ

= ७०° को ज्या - ६०° को ज्या

यसै गरी अरू पनि सिद्ध हुन्छन् ।

१२० त्रिज्या मानी १०, १० अंश फरक पारी बनाइएको सारणीबाट ल्याइएका ज्या उत्क्रमज्यालाई भास्करले लघुज्या लघुउत्क्रमज्या शब्दले व्यवहार गरेका छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## लघुज्या ल्याउने रीति

जसरी २२५,२२५ कलाका फरक पारी ल्याइएका २४ वटा ज्या उत्क्रमज्या-बाट अभीष्ट अंशका ज्या उत्क्रमज्या ल्याउन सकिन्छ, त्यसै गरी १०,१० अंश फरक पारी ल्याइएका ९ वटा ज्या उत्क्रमज्याका खण्डबाट पनि अभीष्ट अंशका ज्या उत्क्रमज्या ल्याउन सकिन्छ । यस विषयमा भास्करले बोलेको कुरा यो हो—

यद्वा सुखाऽर्थं लघुखण्डकैर् ज्या ।
रूपाऽश्विनो२१ विंशति२०रङ्कचन्द्रा१९
अत्यष्टि१७तिथ्य१५र्क१२नवे९षु५दस्राः२ ।
ज्याखण्डकान्यंशमितेर् दशा१०प्तं ।
स्युर् यातखण्डान्यथ भोग्यनिघ्नाः ॥४१॥
शेषांऽशकाः खेन्दु१०हृता यदाप्तं
तद् यातखण्डैक्ययुतं लघुज्या ।
जिनां२४शजीवाऽाङ्ककृता विपादाः (४८।४५)
स्याद् उत्क्रमज्याऽात्र विलोमखण्डैः ॥४२॥
विशोध्य खण्डानि दश१०घ्नशेषाद्
अशुद्धलब्धं धनुरंशकाऽाद्यम् ।
विशुद्धसंख्याहतदिग्१०युतं स्याद् . . . ॥४३॥

(सिद्धान्तशिरोमणि स्पष्टाधिकार १२–१५ श्लोक)

[सजिलोको लागि लघुज्याखण्डबाट ज्या ल्याए पनि हुन्छ । २१, २०, १९, १७, १५, १२, ९, ५, २, यी लघुज्याखण्ड हुन् । इष्ट चापका अंशलाई १० ले भाग लिनू, लब्धितुल्य गत खण्ड आउँछन् । शेषांशलाई एष्य खण्डले गुन्नू, गुणनफल-लाई १० ले भाग लिई लब्धि ल्याउनू । यो लब्धिलाई गत खण्ड (इष्ट चापलाई १० ले भाग लिंदा जति लब्धि आएको छ, त्यतिवटा उठानदेखिका खण्ड) को योगमा जोड्नू । इष्ट अंशको लघुज्या आउँछ । २४ अंशको लघुज्या पौने ४९ हुन्छ । ❀

❀ ३४३८ त्रिज्यामा २४ अंशको ज्या १३९८ हुन्छ [३२ प्रक्रमको उदाहरण-बाट] यसलाई १२० त्रिज्यामा परिणत गर्दा $\frac{१३९८ \times १२०}{३४३८} = ४८\cdot७९५$ हुन्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यिनै खण्डलाई उल्टो क्रमबाट राखी यही रीतले ज्या ल्याएमा लघुउत्क्रमज्या आउँछ।

इष्ट ज्याबाट लघुज्याखण्डलाई घटाउँदै जानू। शेषलाई १० ले गुनी एष्य खण्डले भाग लिनू, अंशादि लब्धि आउँछ। जतिवटा खण्ड घटेका छन्, त्यति संख्यालाई १० ले गुनी अघि आएको अंशादि लब्धिमा जोडिदिनू, इष्ट ज्याको अंशादि चाप हुन्छ। इष्ट उत्क्रमज्याबाट पनि यही रीतले इष्ट चाप ल्याउन सकिन्छ।]

१ उदाहरण— ७४ अंशको लघुज्या र लघुकोटिज्या ल्याऊ।

१०)७४(७ गत खण्डको संख्या

७०

४ शेषांश

$$\frac{४ \times ५}{१०} = २$$

७ वटा गत खण्डका योग

$= २१ + २० + १९ + १७ + १५ + १२ + ९ = ११३$†

∴ ७४° को लघुज्या $= ११३ + २ = ११५$

फेरि

७४° को कोटि $= ९०° — ७४° = १६°$

---

यस कारण भास्करले २४ अंशको लघुज्या पौने ४९ अर्थात् ४८·७५ भनेको आसन्न-रूपले उचित देखिन्छ।

भास्करको लघुज्या ल्याउने सूत्रअनुसार २४ अंशको ज्या ल्याउँदा–

१०)२४(२ गत खण्ड

२०

४ शेषांश

$$\frac{४ \times १९}{१०} = ७·६$$

∴ २४° को लघुज्या $= २१ + २० + ७·६ = ४८·६$ आउँछ।

यो पौने ४९ अलि छैन। यस कारण यस अशुद्धिलाई सच्याउन भास्करले अन्तर्ज्यासपद्धतिबाट स्फुटभोग्यखण्ड ल्याएका छन्। यस विषयल ई हामीले प्राचीन र नवीन गणितको तुलना नामक पुस्तकका १३४–१३९ पृष्ठमा दिएका छौं।

† यहाँ १० सारणी हेरी ७० अंशको लघुज्या ११३ तथा अन्तर ५ भनी काम गरे सजिलो पर्छ। (४२ प्रक्रमको टिप्पणी हेर्नुहोस्।)

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१०)१६(१ गत खण्डको संख्या
  १०
  ६ शेषांश

एष्य खण्ड = दोस्रो खण्ड = २०

∴ $\frac{२० \times ६}{१०} = १२$

∴ १६° को लघुज्या = २१ + १२ = ३३

∴ ७४° को लघुकोटिज्या = ३३

## २९—प्रश्नमाला

तलका चापका लघुज्या र लघुकोटिज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) ३२ अं | (२) ६४ अं | (३) ३८ अं |
| (४) ७६ अं | (५) २५ अं | (६) ८२ अं |
| (७) ५५ अं | (८) ४४ अं | (९) ६६ अं |
| (१०) ४८ अं | (११) ३७ अं | (१२) ७८ अं |

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) ६३·४, १०१·६ | (२) १०७·३, ५२·४ | (३) ७३·६, ९४·४ |
| (४) ११६, २९ | (५) ५०·५, १०८·५ | (६) ११८·४, १६·८ |
| (७) ९८, ६८·५ | (८) ८३, ८६ | (९) १०९·४, ४८·६ |
| (१०) ८९, ८० | (११) ७१·९, ९५·६ | (१२) ११७, २५ |

२ उदाहरण— लघुज्या ९८ भए भुजचाप तथा कोटिचाप कति होला ?

| | | |
|---|---|---|
| ९८ | ७७ | ५७ |
| २१ पहिलो खण्ड | २० दोस्रो खण्ड | १९ तेस्रो खण्ड |
| ७७ | ५७ | ३८ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | | | |
|---|---|---|---|
| ३८ | | २१ | |
| १७ | चौथो खण्ड | १५ | पाँचौं खण्ड |
| २१ | | ६ | शेष |

यस कारण एष्य खण्ड = छैटौं खण्ड = १२

गत खण्डको संख्या = ५

$$\frac{६ \times १०}{१२} = ५$$

∴ इष्ट भुजचाप = १० × ५ + ५

= ५० + ५ = ५५ अं‡

कोटिचाप = ९०° — ५५° = ३५°

## ३०—प्रश्नमाला

तलका लघुज्याका भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ—

(१) ३५ (२) २३ (३) ८०

(४) ९५ (५) ११४·५ (६) ९५·६

(७) ५०·५ (८) ८७·५ (९) १००·४

(१०) १०६·७ (११) ६५·१ (१२) ४६·७

## उत्तर

(१) १७ अं, ७३ अं (२) ११ अं, ७९ अं (३) ४२ अं, ४८ अं

(४) ५२·५ अं, ३७·५ अं (५) ७३ अं, १७ अं (६) ५३ अं, ३७ अं

(७) २५ अं, ६५ अं (८) ४७ अं, ४३ अं (९) ५७ अं, ३३ अं

(१०) ६३ अं, २७ अं (११) ३३ अं, ५७ अं (१२) २३ अं, ६७ अं

३ उदाहरण—७४ अं को लघुउत्क्रमज्या र लघुकोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ ।

---

‡ यहाँ १० सारणी हेरी ९२ लघुज्याको चाप ५० तथा अन्तर १२ भनी काम गरे सजिलो पर्छ (४३ प्रक्रमको टिप्पणी हेर्नुहोस् ) ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१०)७४(७ गत खण्डको संखया
   ७०
   ४ शेषांश

एष्य खण्ड = आठौं खण्ड = २०

$\frac{४ \times २०}{१०} = ८$

७ वटा गत खण्डको योग = २ + ५ + ९ + १२ + १५ + १७ + १९
= ७९ ❀

∴ ७४° को लघुउत्क्रमज्या = ७९ + ८ = ८७

फेरि ७४° को कोटि = ९०° — ७४° = १६°

१०)१६(१ गत खण्डसंखया
   १०
   ६ शेषांश

∴ एष्य खण्ड = दोस्रो खण्ड = ५

$\frac{६ \times ५}{१०} = ३$

∴ १६° को लघुउत्क्रमज्या = २ + ३ = ५

∴ ७४° को लघुकोटच्युत्क्रमज्या = ५

## ३१—प्रश्नमाला

तलका चापका लघुउत्क्रमज्या र लघुकोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) ३५ अं | (२) ४४ अं | (३) ७७ अं |
| (४) ६६ अं | (५) ५६ अं | (६) ८७ अं |
| (७) ४८ अं | (८) २५ अं | (९) ६८ अं |
| (१०) ७२ अं | (११) ३८ अं | (१२) १८ अं |

---

❀ यहां १० सारणी हेरी ७० अंशको लघुउत्क्रमज्या ७९ तथा अन्तर २० भनी काम गरे सजिलो पर्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) २२,५१·५ | (२) ३४, ३७ | (३) ९३, ३.५ |
| (४) ७१·४, १०·६ | (५) ५३·२, २०·८ | (६) ११३·७, ·६ |
| (७) ४०, ३१ | (८) ११·५, ६९·५ | (९) ७५·२, ८·८ |
| (१०) ८३, ६ | (११) २५·६, ४६·४ | (१२) ६, ८३ |

४ उदाहरण — लघुउत्क्रमज्या ८७ भए भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ ।

| | | |
|---|---|---|
| ८७ | ८५ | ८० |
| २ पहिलो खण्ड | ५ दोस्रो खण्ड | ९ तेस्रो खण्ड |
| ८५ | ८० | ७१ |
| ७१ | ५९ | ४४ |
| १२ चौथो खण्ड | १५ पाँचौं खण्ड | १७ छैटौं खण्ड |
| ५९ | ४४ | २७ |

२७
१९ सातौं खण्ड
८ शेष

∴ गत खण्डको संख्या = ७

एष्य खण्ड = आठौं खण्ड = २०

∴ शेषांश = $\frac{१० \times ८}{२०}$ = ४

∴ इष्ट भुजचाप = १० × ७ + ४ = ७४ अं‡

कोटिचाप = ९०° — ७४° = १६ अं

## ३२—प्रश्नमाला

तलका लघुउत्क्रमज्याका भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ—

(१) ३४ (२) ५ (३) २५

‡ यहाँ पनि माथि जस्तै सारणी हेरी काम गरे सजिलो पर्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(४) ८२ (५) ६५·७ (६) ४८·१
(७) ५३·२ (८) ९२ (९) १०५·३
(१०) ७३·३ (११) ९० (१२) ११३·७

उत्तर

(१) ४४ अं, ४६ अं (२) १६ अं, ७४ अं (३) ३७·५ अं, ५२·५ अं
(४) ७१·५ अं, १८·५ अं (५) ६३ अं, २७ अं (६) ५३ अं, ३७ अं
(७) ५६ अं, ३४ अं (८) ७६·५अं, १३·५ अं (९) ८३ अं, ७ अं
(१०) ६७ अं २३ अं (११) ७५·५अं, १४·५अं (१२) ८७ अं, ३ अं

## ४८ प्रक्रम

जसरी भास्करले १२० त्रिज्यामा १०, १० अंश फरक पारी ज्याका खण्ड दिई तिनबाट अभीष्ट चापका ज्या ल्याएका छन्, त्यसै गरी ब्रह्मगुप्तले १५० त्रिज्यामा १५, १५ अंश फरक पारी ज्याका खण्ड दिई तिनबाट अभीष्ट चापका ज्या ल्याएका छन् (२१ प्रक्रम हेर्नुहोस्) ।

त्रिंशत्सनवरसेन्दुजिनतिथिविषया
३९।३६।३१।२४।१५।५ गृहार्द्ध१५चापानाम् ।
अर्द्धं ज्याखण्डानि ज्याभुक्तैक्यं सभोग्यफलम् ।।४४।।
ज्याखण्डोने शेषे गुणिते नवभिः शतैर्९०० अशुद्धहृते ।
क्षेप्याणि शुद्धखण्डैर् गुणितानि शतानि नव९०० चापम् ।।४५।।

( खण्डखाद्यक त्रिप्रश्नाधिकार ७–८ श्लोक )

[१५, ३०, ४५, ६०, ७५, ९० अंशका ज्याखण्ड क्रमैले ३९, ३६, ३१, २४, १५, ५ हुन्छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## चापबाट ज्या ल्याउने रीति

इष्ट चापलाई कला बनाई ९०० ले भाग लिनू, लब्धितुल्य गत खण्ड आउँछन् । शेषकलालाई एष्य खण्डले गुन्नू, गुणनफललाई ९०० ले भाग लिई लब्धि ल्याउनू, यस लब्धिलाई गत खण्ड (इष्ट चापको कलालाई ९०० ले भाग लिंदा जति लब्धि आएको छ, त्यतिवटा उठानदेखिका खण्ड) को योगमा जोड्नू, इष्ट चापको ज्या हुन्छ ।

## ज्याबाट चाप ल्याउने रीति

इष्ट ज्याबाट ज्याखण्ड घटाउँदै जानू, शेषलाई ९०० ले गुनी एष्य खण्डले भाग लिनू, कलादि लब्धि आउँछ । जतिवटा खण्ड घटेका छन्, त्यति संख्यालाई ९०० ले गुन्नू, अघि आएको कलादि लब्धिमा जोडिदिनू, इष्ट ज्याको कलादि चाप हुन्छ ।]

१ उदाहरण—१५० त्रिज्या भएमा ४२ अंश २१ कलाको ज्या र कोटिज्या ल्याऊ ।

$४२^\circ\ २१' = ४२ \times ६० + २१ = २५२० + २१ = २५४१$ क

९००)२५४१(२ गत खण्डको संख्या
 १८००
 ७४१ शेष

यस कारण एष्य खण्ड = तेस्रो खण्ड = ३१

$\therefore$ ज्याशेष $= \dfrac{७४१ \times ३१}{९००} = २५.५२$

२ वटा गत खण्डको योग $= ३९ + ३६ = ७५$

$\therefore$ १५० त्रिज्यामा $४२^\circ\ २१'$ को ज्या $= ७५ + २५.५२$
$= १००.५२$

फेरि,

$४२^\circ\ २१'$ को कोटि $= ९०^\circ - ४२^\circ\ २१' = ४७^\circ\ ३९'$

$४७^\circ\ ३९' = ४७ \times ६० + ३९ = २८२० + ३९$
$= २८५९$ क

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

९००)२८५९(३ गत खण्डको संख्या
२७००
१५९ शेष

एष्य खण्ड = चौथो खण्ड = २४

∴ याशेष = $\frac{१५९ \times २४}{९००}$ = ४·२४

३ वटा गत खण्डको योग = ३९ + ३६ + ३१ = १०६

∴ १५० त्रिज्यामा ४७° ३९' को ज्या = १०६ + ४·२४ = ११०·२४

∴ १५० त्रिज्यामा ४२° २१' को कोटिज्या = ११०·२४

२ उदाहरण— १५० त्रिज्यामा ज्या १२० भए भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ ।

| | | |
|---|---|---|
| १२० | ८१ | ४५ |
| ३९ पहिलो खण्ड | ३६ दोस्रो खण्ड | ३१ तेस्रो खण्ड |
| ८१ | ४५ | १४ ज्याशेष |

∴ गत खण्डको संख्या = ३

एष्य खण्ड = चौथो खण्ड = २४

∴ शेषकला = $\frac{१४ \times ९००}{२४}$ = ५२५

∴ इष्ट भुजचाप = ३ × ९०० + ५२५ = २७०० + ५२५ = ३२२५ क

= ५३°४५'

कोटिचाप = ९०° — ५३° ४५' = ३६°१५'

## ३३–प्रश्नमाला

१५० त्रिज्या भएमा तलका चापका ज्या र कोटिज्या ल्याऊ—

(१) ३२ अं (२) ६४ अं (३) ३८ अं

(४) ७६ अं (५) २५ अं (६) ८२ अं

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(७) ५५ अं (८) ४४ अं (९) ६६ अं
(१०) ४८ अं (११) ३७ अं (१२) ७८ अं
(१३) ५० अं ३३ क (१४) ७० अं २७ क (१५) ६६ अं ३० क
(१६) ८२ अं ३९ क

१५० त्रिज्यामा आएका तलका ज्याका भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ—

(१७) ३५ (१८) २३ (१९) ८०
(२०) ९५ (२१) ११४·४ (२२) ९३·६
(२३) ६१·५ (२४) १३५ (२५) ११९·२
(२६) १४०·५ (२७) ४४·४ (२८) १२४

## उत्तर

(१) ७९·१३, १२६·८ (२) १३४, ६५·४
(३) ९१·५३, ११७·२ (४) १४५·३३, ३६·४
(५) ६३, १३५ (६) १४७·३३, २०·८
(७) १२२, ८५·३३ (८) १०३·९३, १०७·६
(९) १३६, ६०·६ (१०) ११०·८, ९९·८
(११) ८९·४७, ११८·८ (१२) १४६, ३१·२
(१३) ११४·८८, ९४·५३ (१४) १४०·४५, ४९·९२
(१५) १३६·५, ५९·४ (१६) १४७·५५, १९·११
(१७) १३ अं २८ क, ७६ अं ३२ क (१८) ८ अं ५१ क, ८१ अं ९ क
(१९) ३२ अं २५ क, ५७ अं ३५ क (२०) ३९ अं ४१ क, ५० अं १९ क
(२१) ५० अं १५ क, ३९ अं ४५ क (२२) ३९ अं, ५१ अं
(२३) २४ अं २३ क, ६५ अं ३७ क (२४) ६५ अं, २५ अं
(२५) ५३ अं १५ क, ३६ अं ४५ क (२६) ७० अं ३० क, १९ अं ३० क
(२७) १७ अं १५ क, ७२ अं ४५ क (२८) ५६ अं १५ क, ३३ अं ४५ क

## ४६ प्रक्रम —

ब्रह्मगुप्तले १५० त्रिज्या मानेर १५, १५ अंश फरक पारी जसरी ज्या ल्याई ज्याखण्ड दिएका छन्; गणेश दैवज्ञले २४ त्रिज्या मानी १५, १५ अंश फरक पारी

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

त्यसरी नै ज्या ल्याई ज्याखण्ड दिएका छन् । ( २१ प्रक्रम हेर्नुहोस् ।)

गणेश दैवज्ञले ज्यालाई क्रान्ति भन्ने नामले व्यवहार गरेका छन् । (२१ प्रक्रमको टिप्पणी हेर्नुहोस् ।)

षट्षडिषूदधिदृक्कुभि६।६।५।४।२।१रर्धैः
खेटभुजांऽशदिनां१५शमितैक्यम् ।
शेषहतैष्यदिनां१५शयुतं वांऽ।-
शा।ऽद्यपमः सुखसंव्यवहृत्यै ।।४६।।
ततो दलानि शोधयेत् तिथि१५घ्नशेषमेष्यहृत् ।
तिथि१५घ्नशुद्धसंख्यया युतं भवन्ति दोर्लवाः ।।४७।।

(ग्रहलाघव त्रिप्रश्नाधिकार १२–१३श्लोक)

[ १५, ३०, ४५, ६०, ७५, ९० अंशका ज्याखण्ड क्रमैले ६, ६, ५, ४, २, १ हुन्छन् ।

## चापबाट ज्या ल्याउने रीति

इष्ट चापका अंश (भुजांश) लाई १५ ले भाग लिनू, लब्धितुल्य गत खण्ड आउँछन् । शेषांशलाई एष्य खण्डले गुन्नू । गुणनफललाई १५ ले भाग लिई लब्धि ल्याउनू । यस लब्धिलाई गत खण्ड (इष्ट चापको अंशलाई १५ ले भाग लिंदा जति लब्धि आएको छ त्यतिवटा उठानदेखिका खण्ड) को योगमा जोड्नू, इष्ट चापको ज्या हुन्छ ।

## ज्याबाट चाप ल्याउने रीति

इष्ट ज्याबाट ज्याखण्ड घटाउँदै जानू, शेषलाई १५ ले गुनी एष्य खण्डले भाग लिनू, अंशादि लब्धि आउँछ । जतिवटा खण्ड घटेका छन्, त्यति संख्यालाई १५ ले गुनी अघि ल्याएको अंशादि लब्धिमा जोडिदिनू, इष्ट ज्याको अंशादि चाप हुन्छ ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

१ उदाहरण— २४ त्रिज्या भएमा ७४ अंशको ज्या र कोटिज्या ल्याऊ।

१५)७४(४ गत खण्डको संख्या
६०
—
१४ शेषांश

∴ एष्य खण्ड = पाँचौं खण्ड = २

ज्याशेष = $\frac{२ \times १४}{१५}$ = १·८७

४ वटा गत खण्डको योग = ६ + ६ + ५ + ४ = २१

∴ २४ त्रिज्यामा ७४° को ज्या = २१ + १·८७ = २२·८७

फेरि, ७४°को कोटि = ९०° — ७४° = १६°

१५)१६(१ गत खण्डको संख्या
१५
—
१ शेषांश

∴ एष्य खण्ड = दोस्रो खण्ड = ६

∴ ज्याशेष = $\frac{१ \times ६}{१५}$ = ०·४

∴ २४ त्रिज्यामा १६° को ज्या = ६ + ०·४ = ६·४

∴ २४ त्रिज्यामा ७४° को कोटिज्या = ६·४

२ उदाहरण – २४ त्रिज्यामा ज्या १५ भए भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ।

| | |
|---|---|
| १५ | ९ |
| ६ पहिलो खण्ड | ६ दोस्रो खण्ड |
| ९ | ३ ज्याशेष |

∴ गत खण्डको संख्या = २

एष्य खण्ड = तेस्रो खण्ड = ५

∴ शेषांश = $\frac{१५ \times ३}{५}$ = ९

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

∴ इष्ट भुजचाप = १५ × २ + ९ = ३९°

कोटिचाप = ९०° — ३९° = ५१°

## ३४—प्रश्नमाला

२४ त्रिज्या भएमा तलका चापका ज्या र कोटिज्या ल्याऊ—

(१) ३२ अं (२) ६४ अं (३) ३८ अं
(४) ७६ अं (५) २५ अं (६) ८२ अं
(७) ५५ अं (८) ४४ अं (९) ६६ अं
(१०) ४८ अं (११) ३७ अं (१२) ७८ अं
(१३) ५० अं ३३ क (१४) ७० अं २७ क (१५) ६६ अं ३० क
(१६) ८२ अं ३९ क

२४ त्रिज्यामा आएका तलका ज्याका भुजचाप र कोटिचाप ल्याऊ—

(१७) १७ (१८) १९ (१९) ९
(२०) २२ (२१) १३·८ (२२) २२·२
(२३) ७·८ (२४) २३·५१ (२५) २२·२२
(२६) १५·१५ (२७) १८·३६ (२८) २३·२३

## उत्तर

(१) १२·६७, २०·४७ (२) २१·५३, १०·४
(३) १४·६७, १८·८७ (४) २३·०७, ५·६
(५) १०, २१·६७ (६) २३·४७, ३·२
(७) १९·६७, १३·६७ (८) १६·६७, १७·२७
(९) २१·८, ९·६ (१०) १७·८, १६
(११) १४·३३, १९·१३ (१२) २३·२, ४·८
(१३) १८·४८, १५·१५ (१४) २२·३९, ७·८२
(१५) २१·८७, ९·४ (१६) २३·५१, २·९४

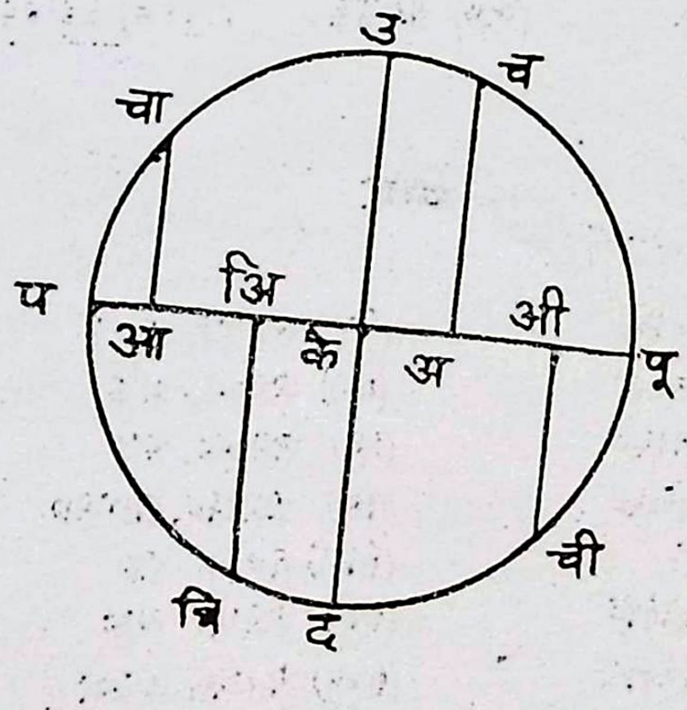
CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | |
|---|---|
| (१७) ४५ अं, ४५ अं | (१८) ५२ अं ३० क, ३७ अं ३० क |
| (१९) २२ अं ३० क, ६७ अं ३० क | (२०) ६७ अं ३० क, २२ अं ३० क |
| (२१) ३५ अं २४ क, ५४ अं ३६ क | (२२) ६९ अं, २१ अं |
| (२३) १९ अं ३० क, ७० अं ३० क | (२४) ८२ अं ३९ क, ७ अं २१ क |
| (२५) ६९ अं ९ क, २० अं ५१ क | (२६) ३९ अं २७ क, ५० अं ३३ क |
| (२७) ५० अं ६ क, ३९ अं ५४ क | (२८) ७८ अं २७ क, ११ अं ३३ क |

## ५० प्रक्रम

### कोटिज्याको धनत्व र ऋणत्वको विषयमा विचार

'चापको एक प्रान्तबाट व्यासरेखा हाली त्यसको उपरमा अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्बरेखालाई त्यस चापको 'ज्या' भन्दछन्" तथा "ज्याको मूल र केन्द्रको अन्तर (पूर्वापर व्यासको टुक्रो) लाई त्यस चापको 'कोटिज्या' भन्दछन्" भनी माथि ३ प्रक्रममा बताइएको छ । "पूर्वपदादि र ज्यामूलको बीचको भागलाई त्यस चापको 'उत्क्रमज्या' भन्दछन्" तथा "त्रिज्याबाट कोटिज्या घटायो भने उत्क्रमज्या आउँछ" भनी माथि ५ प्रक्रममा बताइएको छ । यी कुरालाई लिई अब हामी कोटिज्या र उत्क्रमज्याको विषयमा केही विचार गर्छौं ।




[ ३१ चित्र ]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

प्रथम पदमा

पू च चापको ज्या = च अ

कोटिज्या = के अ

उत्क्रमज्या = अ पू

के पू — के अ = अ पू

यस कारण, यहाँ

त्रि — कोटिज्या = उत्क्रमज्या

द्वितीय पदमा

पू चा चापको ज्या = चा आ

कोटिज्या = के आ

उत्क्रमज्या = आ पू

के पू + के आ = आ पू

यस कारण, यहाँ

त्रि + कोटिज्या = उत्क्रमज्या

तृतीय पदमा

पू चि चापको ज्या = चि अि

कोटिज्या = के अि

उत्क्रमज्या = अि पू

के पू + के अि = अि पू

यस कारण, यहाँ

त्रि + कोटिज्या = उत्क्रमज्या

चतुर्थ पदमा

पू ची चापको ज्या = ची अी

कोटिज्या = के अी

उत्क्रमज्या = अी पू

के पू — के अी = अी पू

यस कारण, यहाँ

त्रि — कोटिज्या = उत्क्रमज्या

यताबाट

प्रथम पदमा र चतुर्थ पदमा त्रि — कोटिज्या = उत्क्रमज्या,
द्वितीय पदमा र तृतीय पदमा त्रि + कोटिज्या = उत्क्रमज्या
हुन आएको स्पष्ट देखियो ।

घट्दा धनात्मक वियोजक ऋणात्मक भई वियोज्यमा जोडिन्छ, ऋणात्मक वियोजकचाहिँ धनात्मक भई वियोज्यमा जोडिन्छ भन्ने कुरा बीजगणितबाट स्पष्ट हुन्छ ।

यस कारण

चापको पूर्वपदादि र ज्यामूलको बीचमा रहेको पूर्वापर व्यासको टुक्रो उत्क्रमज्या हो र त्रिज्याबाट कोटिज्या घटाउँदा उत्क्रमज्या आउँछ भन्ने नियमको प्रतिपालन गर्दा प्रथम र चतुर्थ पदमा कोटिज्या धन तथा द्वितीय र तृतीय पदमा कोटिज्या ऋण हुँदा रहेछन् ।

भन्ने सिद्धान्त बसन आउँछ ।

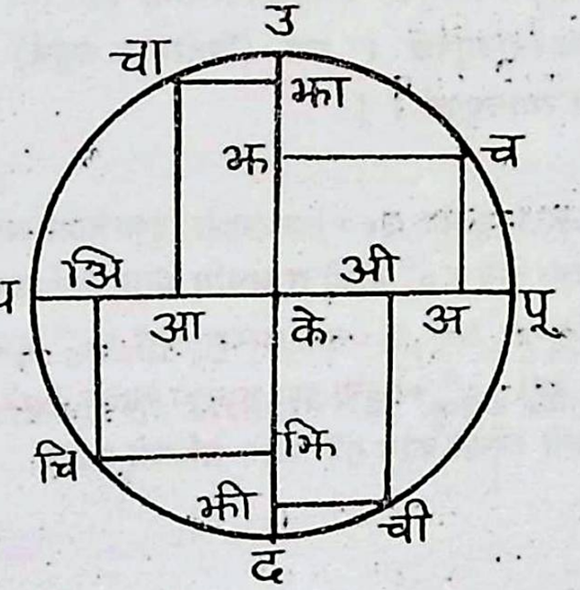
कोटिज्यका स्यात् प्रथमे चतुर्थे ।
पादे धनं शेषपदोर् ऋणं सा ।।४७½।।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[प्रथम पद र चतुर्थ पदमा कोटिज्या धन हुन्छ, द्वितीय पद र तृतीय पदमा कोटिज्या ऋण हुन्छ ।]

## ज्याको धनत्व र ऋणत्वको विषयमा विचार

"याम्योत्तर व्यासको उपरमा चापको अर्को प्रान्तबाट गरेको लम्ब सो चापको कोटिज्या हुन्छ" भनी माथि १४ प्रक्रममा लेखिएको छ । "कोटिज्याको मूल बिन्दु-बाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दुसम्म रहेको याम्योत्तर व्यासको टुक्रोलाई त्यस चापको 'कोटच ुत्क्रमज्या' भन्दछन्" तथा "त्रिज्याबाट ज्या घटाइदियो भने कोटच ुत्क्रमज्या बाँकी रहन्छ" भनी माथि १५ प्रक्रममा लेखिएको छ । यी कुरालाई लिई अब हामी ज्या र कोटच ुत्क्रमज्याको विषयमा विचार गर्छौं ।




[३२ चित्र]

**प्रथम पदमा**

पू च चापको ज्या = च अ = के झ

कोटिज्या = च झ = के अ

कोट्युत्क्रमज्या = झ उ

के उ — के झ = झ उ

यस कारण, यहाँ

त्रि — ज्या = कोट्युत्क्रमज्या

**द्वितीय पदमा**

पू चा चापको ज्या = चा आ = के झा

कोटिज्या = चा झा = के आ

कोट्युत्क्रमज्या = झा उ

के उ — के झा = झा उ

यस कारण, यहाँ

त्रि — ज्या = कोट्युत्क्रमज्या

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

तृतीय पदमा

पू चि चापको ज्या = चि त्रि = के क्षि

कोटिज्या = चि क्षि = के त्रि

कोट्युत्क्रमज्या = क्षि उ

के उ + के क्षि = क्षि उ

यस कारण, यहाँ

त्रि + ज्या = कोट्युत्क्रमज्या

चतुर्थ पदमा

पू ची चापको ज्या = ची श्री = के क्षी

कोटिज्या = ची क्षी = के श्री

कोट्युत्क्रमज्या = क्षी उ

के उ + के क्षी = क्षी उ

यस कारण, यहाँ

त्रि + ज्या = कोट्युत्क्रमज्या

यताबाट

प्रथम पद र द्वितीय पदमा त्रि — ज्या = कोट्युत्क्रमज्या,

तृतीय पद र चतुर्थ पदमा त्रि + ज्या = कोट्युत्क्रमज्या

हुन आएको स्पष्ट देखिन्छ ।

यस कारण माथिकै नियमअनुसार प्रथम पद र द्वितीय पदमा ज्या धन, तृतीय पद र चतुर्थ पदमा ज्या ऋण हुँदा रहेछन् भन्ने सिद्धान्त बस्न आउँछ ।

ज्याया धनत्वं प्रथमे द्वितीये
पादे भवेच् शेषपदोर् ऋणत्वम् ।।४८।।

[प्रथम पद र द्वितीय पदमा ज्या धन हुन्छ । तृतीय पद र चतुर्थ पदमा ज्या ऋण हुन्छ ।]

## ११ सारणी

| पद | ज्या | कोटिज्या |
|---|---|---|
| प्रथम (०° — ९०°) | + | + |
| द्वितीय (९०° — १८०°) | + | — |
| तृतीय (१८०° — २७०°) | — | — |
| चतुर्थ (२७०° — ३६०°) | — | + |

यस विषयमा वि. सं. ९८९ मा मुञ्जालले बोलेको कुरो चाखलाग्दो छ—

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

ग्रहः स्वोच्चोनितः केन्द्रं तदूर्ध्वाऽधोऽर्धजो भुजः ।
धनर्णं पदशः कोटी धनर्णर्णधनाऽत्मिका ।।४९।।

(लघुमानस स्फुटगत्यधिकार १ श्लोक)

[ग्रहबाट उच्च घटाइदियो भने केन्द्र† आउँछ। माथितिरको (पहिलो) आधा भागमा (प्रथम र द्वितीय पदमा) भुज (भुजज्या) धन हुन्छ । तलतिरको (पछिल्लो)आधा भागमा (तृतीय र चतुर्थ पदमा) भुजज्या ऋण हुन्छ । कोटिज्या-चाहिं प्रथम पदमा धन, द्वितीय पदमा ऋण, तृतीय पदमा ऋण, चतुर्थ पदमा धन, हुन्छ ।]

माथिको सारणीबाट प्रथम पदमा ज्या र कोटिज्या दुवै धन; द्वितीय पदमा ज्या धन, कोटिज्या ऋण, तृतीय पदमा ज्या र कोटिज्या दुवै ऋण, चतुर्थ पदमा ज्या ऋण, कोटिज्या धन हुने स्पष्ट देखिन्छ ।

उदाहरण— ३००° को ज्या तथा कोटिज्या चिह्नसहित ल्याऊ ।

इष्ट चाप पहिलो पदमा भए सो चापकै अंशको ज्या, इष्ट चाप दोस्रो पदमा भए सो चापलाई १८०° बाट घटाई शेष अंशको ज्या, इष्ट चाप तेस्रो पदमा भए सो चापबाट १८०° घटाई शेष अंशको ज्या, इष्ट चाप चौथो पदमा भए सो चापलाई ३६०° बाट घटाई शेष अंशको ज्या ल्याउनुपर्छ [३७ प्रक्रम] ।

जति अंशको ज्या ल्याइन्छ त्यति अंशलाई भुज भन्ने चलन छ । भुज घटेको ९०° को ज्या इष्ट अंशको कोटिज्या हुने हुनाले इष्ट अंशको भुज घटेको ९०° इष्ट चापको कोटि कहाउँछ [३९ प्रक्रम] ।

यहाँ इष्ट चापको अंश = ३००°

यी अंश २७०° नाघी ३६०° भित्र परेका हुनाले इष्ट चाप चौथो पदमा रहेको छ भन्ने स्पष्ट छ ।

यस कारण भुज = ३६०° — ३००° = ६०°

कोटि = ९०° — ६०° = ३०°

∴ ८ सारणीबाट—

६०° को ज्या = २९७७

३०° को ज्या = १७१९

---

† यस केन्द्रको विचार ग्रहगणितमा हुन्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

इष्ट चाप चौथो पदमा रहेको हुनाले ११ सारणीबाट ज्या ऋण, कोटिज्या धन हुने देखिन्छ ।

यस कारण

३००° को ज्या = —२९७७

कोटिज्या = १७१९

अथवा

**गताद् भुजज्या विषमे गम्यात् कोटिः पदे भवेत् ।**
**युग्मे तु गम्याद् बाहुज्या कोटिज्या तु गताद् भवेत् ॥५०॥**

(सूर्यसिद्धान्त स्पष्टाधिकार ३० श्लोक)

[विषम (प्रथम र तृतीय) पदमा पदादिबाट जति नाघेको छ, त्यति (गत) बाट भुजज्या (ज्या) ल्याउनुपर्छ । कोटिज्याचाहिं पदान्तमा पुग्न जति बाँकी छ, त्यति (गम्य) बाट ल्याउनुपर्छ । सम (द्वितीय र चतुर्थ) पदमा गम्यबाट ज्या, गतबाट कोटिज्या ल्याउनुपर्छ । ]

यहाँ इष्ट चापका अंश ३००° भएकाले इष्ट चाप सम पदमा अर्थात् चतुर्थ पदमा छ, पदान्तमा पुग्न ६०° बाँकी छ अर्थात् गम्य ६०° छ तथा पदादिबाट ३०° नाघेको छ अर्थात् गत ३०° छ । यस कारण यहाँ ६०° भुज, ३०° कोटि बनेका छन् । यस कारण यहाँ ६०° को ज्या इष्ट चापको ज्या र ३०° को ज्या इष्ट चापको कोटिज्या हुन्छ भन्ने सम्झी काम गरे अलि सजिलो पर्छ ।

## ३५—प्रश्नमाला

तलका चापका ज्या तथा कोटिज्या आफ्ना चिह्नसाथ लेख—

| | | |
|---|---|---|
| (१) १५ अं | (२) ४५ अं | (३) १०५ अं |
| (४) १३५ अं | (५) २४० अं | (६) ३१५ अं |
| (७) २१० अं | (८) २८५ अं | (९) १५० अं |
| (१०) २२५ अं | (११) १४२ अं ३० क | (१२) ३०३ अं ४५ क |
| (१३) २०२ अं ३० क | (१४) १०१ अं १५ क | (१५) २९६ अं १५ क |
| (१६) १२३ अं ४५ क | (१७) २८१ अं १५ क | (१८) ३४१ अं १५ क |
| (१९) २३६ अं १५ क | (२०) १७२ अं ३० क | |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

## उत्तर

| | |
|---|---|
| (१) ८९०, ३३२१ | (२) २४३१, २४३१ |
| (३) ३३२१,-८९० | (४) २४३१,-२४३१ |
| (५) -२९७७,-१७१९ | (६) -२४३१, २४३१ |
| (७) -१७१९,-२९७७ | (८) -३३२१, ८९० |
| (९) १७१९,-२९७७ | (१०) -२४३१,-२४३१ |
| (११) २०९२,-२७२८ | (१२) -२८५९, १९१० |
| (१३) -१३१६,-३१७६ | (१४) ३३७२,-६७१ |
| (१५) -३०८३,१५२१ | (१६) २८५९,-१९१० |
| (१७) -३३७२, ६७१ | (१८) -११०५, ३२७६ |
| (१९) -२८५९,-१९१० | (२०) ४४९, -३४०९ |

## ५१ प्रक्रम

ज्या कोटिज्याका चिह्न थाहा पाई पद थाहा पाउन सकिन्छ भन्ने कुरा माथिको प्रक्रमबाट स्पष्ट भयो।

माथि ३७-३८ प्रक्रममा ३०$^\circ$, १५०$^\circ$, २१०$^\circ$ र ३३०$^\circ$ का ज्या आपसमा बराबर हुन्छन्, कोटिज्या पनि आपसमा बराबर हुन्छन् भनी विस्तारपूर्वक सिद्ध गरिएको छ।

अर्थात्,

| | | |
|---|---|---|
| ३०$^\circ$ को | ज्या = १७१९ | कोटिज्या = २९७७ |
| १५०$^\circ$ को | ज्या = १७१९ | कोटिज्या = २९७७ |
| २१०$^\circ$ को | ज्या = १७१९ | कोटिज्या = २९७७ |
| ३३०$^\circ$ को | ज्या = १७१९ | कोटिज्या = २९७७ |

यहाँ इष्ट चापको ज्या १७१९ थाहा पाएर इष्ट चाप ल्याउँदा ३०$^\circ$, १५०$^\circ$, २१०$^\circ$, ३३०$^\circ$ चारवटै उत्तर आउने हुनाले वास्तव उत्तर थाहा पाउन सकिँदैनथ्यो। यसै गरी इष्ट कोटिज्याबाट पनि यिनै चार उत्तर आउने हुनाले वास्तव चाप थाहा पाउन सकिँदैनथ्यो।

तर अब

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

| | | |
|---|---|---|
| ३०° को | ज्या = १७१९ | कोटिज्या = २९७७ |
| १५०° को | ज्या = १७१९ | कोटिज्या = −२९७७ |
| २१०° को | ज्या = −१७१९ | कोटिज्या = −२९७७ |
| ३३०° को | ज्या = −१७१९ | कोटिज्या = २९७७ |

हुने हुनाले र

ज्या कोटिज्या दुवैका चिह्न र तीमध्ये एउटाको मान थाहा पाएमा पदको र इष्ट चापांशको ज्ञान हुने हुनाले

वास्तव उत्तर थाहा पाउन सकिन्छ ।

उदाहरण— ज्या = −२९७७, कोटिज्या = धनात्मक

थाहा पाएमा चतुर्थ पद रहेछ भन्ने थाहा पाइन्छ । निर्दिष्ट ज्या २९७७ को चाप (भुज) ६०° हुने हुनाले चतुर्थ पदान्तमा पुग्न ६०° बाँकी रहेछ भन्ने बुझिन्छ ।

यस कारण

इष्ट चाप = ३६०° — ६०° = ३००° देखिन आउँछ ।

आद्ये पदे स्याद् भुज एव कार्मुकं

पादे द्वितीये रहितोऽरि६राशितः ।

पादे तृतीये रिपु६राशिभिर् युतः

पादे चतुर्थे रहितोऽर्क१२राशितः ॥५१॥

[पहिलो पदमा आएको भुज नै इष्ट चाप हुन्छ । दोस्रो पदमा आएको भुजलाई ६ राशि (१८०°) बाट घटाउनू, इष्ट चाप आउँछ । तेस्रो पदमा आएको भुजमा ६ राशि (१८०°) जोड्नू, इष्ट चाप आउँछ । चौथो पदमा आएको भुजलाई १२ राशि (३६०°) बाट घटाउनू, इष्ट चाप आउँछ ।]

## ३६—प्रश्नमाला

तलका ज्याहरूबाट इष्ट चाप ल्याऊ—

(१) ज्या = ४४९, कोटिज्या धनात्मक

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(२) कोटिज्या = – ३४३१, ज्या धनात्मक
(३) ज्या = –१९१०, कोटिज्या धनात्मक
(४) कोटिज्या = –२४३१, ज्या ऋणात्मक
(५) कोटिज्या = २०९३, ज्या धनात्मक
(६) ज्या = ३३७२, कोटिज्या ऋणात्मक
(७) कोटिज्या = – २२६७, ज्या धनात्मक
(८) ज्या = –१३१६, कोटिज्या ऋणात्मक
(९) ज्या = –१७१९, कोटिज्या धनात्मक
(१०) कोटिज्या = –२७२८, ज्या धनात्मक
(११) कोटिज्या = –२५८५, ज्या ऋणात्मक
(१२) ज्या = ३२५६, कोटिज्या ऋणात्मक
(१३) कोटिज्या = ३४०९, ज्या धनात्मक
(१४) कोटिज्या = –२२६७, ज्या ऋणात्मक

## उत्तर

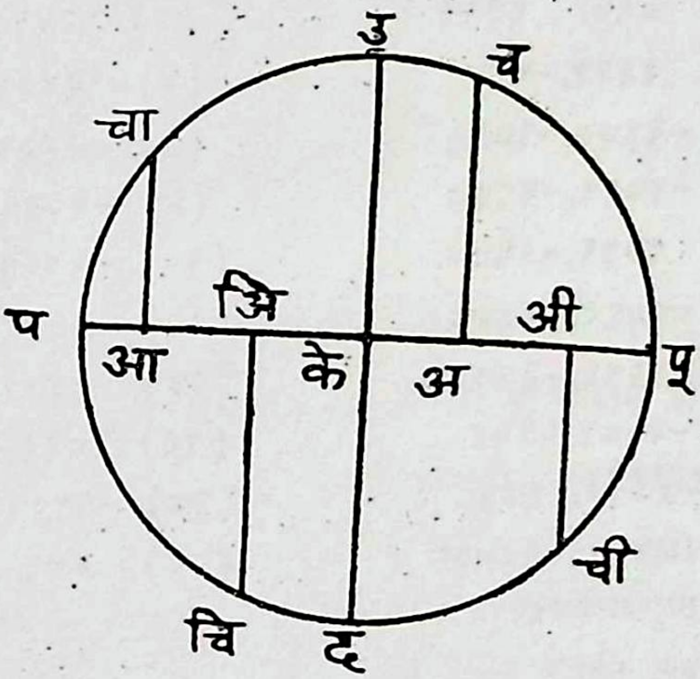
(१) ७ अं ३० क (२) १७६ अं १५ क (३) ३२६ अं १५ क
(४) २२५ अं (५) ५२ अं ३० क (६) १०१ अं १५ क
(७) १३१ अं १५ क (८) २०२ अं ३० क (९) ३३० अं
(१०) १४२ अं ३० क (११) २२१ अं १५ क (१२) १०८ अं ४५ क
(१३) ७ अं ३० क (१४) २२८ अं ४५ क

## ५२ प्रक्रम–

## इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने रीति

पहिलो पदमा रहेको इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने रीतिको विषयमा हामीले ४२ प्रक्रममा विचार गरेका थियौं। अब हामी सबै पदमा रहेका इष्ट चापका उत्क्रमज्या ल्याउने विषयमा विचार गर्छौं।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu




[ ३३ चित्र ]

"पूर्वपदादि र ज्यामूलको बीचको भाग (पूर्वापर व्यासको टुक्रो) लाई त्यस चापको 'उत्क्रमज्या' भन्दछन्" भनी माथि ५ प्रक्रममा लेखिएको छ । त्यस-अनुसार—

प्रथम पदमा— पू च चापको उत्क्रमज्या = अ पू
द्वितीय पदमा— पू चा चापको उत्क्रमज्या = आ पू
तृतीय पदमा— पू चि चापको उत्क्रमज्या = अि पू
चतुर्थ पदमा— पू ची चापको उत्क्रमज्या = अी पू हुन्छन् ।

प्रथम पद र चतुर्थ पदमा कोटिज्या धनात्मक हुन्छ तथा द्वितीय पद र तृतीय पदमा कोटिज्या ऋणात्मक हुन्छ भन्ने कुरा ५० प्रक्रममा सिद्ध गरिएको छ । यताबाट "त्रिज्याबाट कोटिज्या घटायो भने उत्क्रमज्या आउँछ" भन्ने ५ प्रक्रममा दिइएको नियममा केही बाधा पर्दैन । किनभने

प्रथम पदमा—
पू च चापको उत्क्रमज्या = अ पू = के पू — के अ
= त्रि — कोटिज्या

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

द्वितीय पदमा—

प२ चा चापको उत्क्रमज्या = आ प२ = के प२ + के आ
= त्रि + कोटिज्या
= त्रि — (— कोटिज्या)

तृतीय पदमा—

प२ चि चापको उत्क्रमज्या = त्रि प२ = के प२ + के त्रि
= त्रि + कोटिज्या
= त्रि — (— कोटिज्या)

चतुर्थ पदमा—

प२ ची चापको उत्क्रमज्या = श्री प२ = के प२ — के श्री
= त्रि — कोटिज्या
हुन्छन् ।

प्रथम पदमा रहेको इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने रीति ४२ प्रक्रममा दिएकं छ ।

द्वितीय र तृतीय पदमा उत्क्रमज्या = त्रि — (— कोटिज्या) = त्रि + कोटिज्या हुन्छ । यस कारण यहाँ ३९ प्रक्रमको रीतअनुसार इष्ट चापको भुज बनाई (४० प्रक्रममा जस्तै) सो भुजको कोटिबाट ८ सारणी उपयोग गरी ज्या (कोटिज्या) ल्याई त्रिज्यामा जोडिदियो भने इष्ट चापको उत्क्रमज्या आउँछ ।

चौथो पदमा उत्क्रमज्या = त्रि — कोटिज्या हुन्छ । यस कारण यहाँ ३९ प्रक्रमको रीतअनुसार इष्ट चापको भुज बनाई सो भुजबाट ४२ प्रक्रमको रीत-अनुसार ९ सारणी उपयोग गरी उत्क्रमज्या ल्याउनुपर्छ ।

आद्ये चतुर्थे च पदे भुजांऽश-
विलोमजीवैव भवेद् अभीष्टा ।
भुजांऽशकोज्या त्रिभजीवयाऽऽढ्या
व्यस्तज्यका शेषपदोः प्रसिद्ध्येत् ।।५२।।

[पहिलो र चौथो पदमा भुजांशबाट नै उत्क्रमज्या आउँछ । दोस्रो र तेस्रो पदमा भुजांशको कोटिज्या ल्याई त्रिज्यामा जोडिदियो भने इष्ट उत्क्रमज्या आउँछ ।]

१ उदाहरण— १५६ अंश ३० कलाको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यहाँ इष्ट चाप द्वितीय पदमा रहेको हुनाले

अभीष्ट उत्क्रमज्या त्रि+इष्ट चापको भुजांशको कोटिज्या

=त्रि+(१८०°—इष्ट चाप) को कोटिज्या

=त्रि+(१८०°—१५६° ३०') को कोटिज्या

=त्रि+२३° ३०' को कोटिज्या

=३४३८+३१५१ [३५ प्रक्रमको २ उदाहरण]

=६५८९

२ उदाहरण— १९५ अंशको उत्क्रमज्या ल्याऊ।

यहाँ इष्ट चाप तृतीय पदमा रहेको हुनाले

अभीष्ट उत्क्रमज्या=त्रि+इष्ट चापको भुजांशको कोटिज्या

=त्रि+(इष्ट चाप—१८०°) को कोटिज्या

=त्रि+(१९५°—१८०°) को कोटिज्या

=त्रि+१५° कोटिज्या

=३४३८+३३२१

[२० प्रश्नमालाको १ प्रश्नको उत्तरबाट]

=६७५९

३ उदाहरण— ३३६ अंश ३० कलाको उत्क्रमज्या ल्याऊ।

यहाँ इष्ट चाप चौथो पदमा रहेको हुनाले

अभीष्ट उत्क्रमज्या=इष्ट चापको भुजांशको उत्क्रमज्या

=(३६०°—३३६° ३०') को उत्क्रमज्या

=२३° ३०' को उत्क्रमज्या

=२८७ [४२ प्रक्रमको उदाहरणबाट]

## ३७–प्रश्नमाला

तलका चापका उत्क्रमज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) १५ अं | (२) ४५ अं | (३) १०५ अं |
| (४) १३५ अं | (५) २४० अं | (६) ३१५ अं |
| (७) २१० अं | (८) २८५ अं | (९) १५० अं |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(१०) २२५ अं (११) १४२ अं ३० क (१२) ३०३ अं ४५ क
(१३) २०२ अं ३० क (१४) १०१ अं १५ क (१५) २९६ अं १५ क
(१६) १२३ अं ४५ क (१७) २८१ अं १५ क (१८) ३४१ अं १५ क
(१९) २३६ अं १५ क (२०) १७२ अं ३० क

## उत्तर

(१) ११७ (२) १००७ (३) ४३२८
(४) ५८६९ (५) ५१५७ (६) १००७
(७) ६४१५ (८) २५४८ (९) ६४१५
(१०) ५८६९ (११) ६१६६ (१२) १५२८
(१३) ६६१४ (१४) ४१०९ (१५) १९१७
(१६) ५३४८ (१७) २७६७ (१८) १८२
(१९) ५३४८ (२०) ६८४७

## ५२ प्रक्रम

मथिका यति उदाहरण अभ्यास गरिसकेपछि सबै पदमा रहेका इष्ट चापका उत्क्रमज्या ल्याउने रीति विद्यार्थीको मनमा बस्तछ । द्वितीय पदमा रहेको इष्ट चापको उत्क्रमज्या ल्याउने विषयमा कमलाकर तथा भास्करले बोलेको कुरामा यहाँ विचार गर्नु प्रसङ्गमिल्दो हुन आउँछ ।

द्वितीय पदमा भुज $=$ १८०$^{\circ}$ — इष्ट चाप हुन्छ ।

कोटि $=$ ९०$^{\circ}$ — भुज $=$ ९०$^{\circ}$ — (१८०$^{\circ}$ — इष्ट चाप)

$=$ ९०$^{\circ}$ — १८०$^{\circ}$ $+$ इष्ट चाप

$=$ इष्ट चाप — ९०$^{\circ}$ हुन्छ ।

यस कारण

द्वितीय पदमा कोटिज्या $=$ (इष्ट चाप — ९०$^{\circ}$) को ज्या हुन्छ ।

$\therefore$ उत्क्रमज्या $=$ त्रि $+$ कोटिज्या

$=$ त्रि $+$ (इष्ट चाप — ९०$^{\circ}$) को ज्या हुन्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यस विषयमा कमलाकरले बोलेको कुरा तल दिइन्छ—

यद्यत्र भागाः खाऽङ्के९०भ्योऽधिकाः खाऽङ्को९०निताश् च ते ।
तज्ज्यायुक्तत्रिभज्यैव कल्प्या चोत्क्रमशिञ्जिनी ।।५२।।

(सिद्धान्ततत्त्वविवेक स्पष्टाधिकार ८० श्लोक)

[इष्ट चाप ९० अंशभन्दा घेरै (१८० अंशभन्दा थोरै) भएमा इष्ट चापबाट ९० अंश घटाई शेषांशको ज्या ल्याउनू । सो ज्यालाई त्रिज्यामा जोडिदिनू, इष्ट अंशको उत्क्रमज्या आउँछ ।]

यही कुरो भास्करले पनि बोलेका छन्—

बाणेन्दु१५नाड्यूननतात् क्रमज्या
त्रिज्याऽऽन्विता सैव नतोत्क्रमज्या ।

यदा नतं पञ्चदश१५घटिकाभ्योऽधिकं भवति तदोत्क्रमज्याकरणे नतात् पञ्चदश१५घटिका विशोध्य शेषस्य क्रमजीवा त्रिज्यया युता सत्युत्क्रमज्या स्याद् इत्यवगन्तव्यम् ।

अत्रोपपत्तिः । उत्क्रमज्या हि बाणरूपा भवति यदा नतं पञ्चदश१५घटिकाऽऽधिकं तदा पञ्चदश१५घटिकानाम् उत्क्रमज्या बाणरूपा त्रिज्यातुल्या भवति । अथ पञ्चदश१५घटिकाऽऽधिको यः कालस् तस्य क्रमज्योर्ध्वाऽधोरूपा भवति । सा यावत् त्रिज्यया युता क्रियते तावद् बाणरूपोत्क्रमज्या भवति ।

(सिद्धान्तशिरोमणि त्रिप्रश्नाधिकार ६४ श्लोक)

[नतकाल १५ घडीभन्दा बढ्ता भएमा नतकालबाट घडी घटाई शेष कालको ज्या ल्याउनू । सो ज्या त्रिज्यामा जोडिदिनू, इष्ट नतकालको उत्क्रमज्या आउँछ ।

यसको उपपत्ति— उत्क्रमज्या बाण जस्तो भई रहेको हुन्छ । १५ घडीको बाणरूप उत्क्रमज्या त्रिज्यातुल्य हुन्छ । १५ घडीभन्दा नतकाल बढ्ता भएमा, बढ्ता भागको क्रमज्या ऊर्ध्वाधररूप भएर रहेको हुन्छ । सो क्रमज्यालाई त्रिज्यामा जोडिदियो भने बाणरूप उत्क्रमज्या आउँछ ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

भास्करले यहाँ बोलेको कुराको केही व्याख्या आवश्यक छ। अहोरात्रम ६० घडी हुने र नाडीवृत्तमा कालको गणना हुने हुनाले सो वृत्तमा रहेका ६ अंशको १ घडी हुन्छ। यस कारण '१५ घडी भनेको ९० अंश हुन आउँछ।

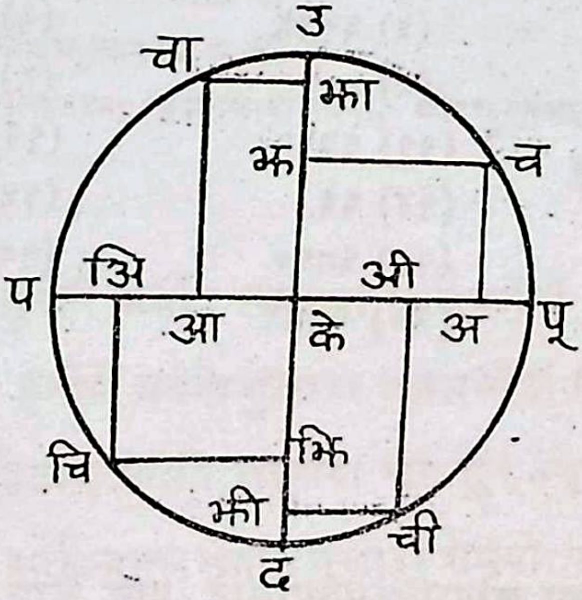
हामीले उत्तर बिन्दु भनी मानेको बिन्दुलाई भास्करले पूर्वपदादि मानी ज्या कोटिज्याहरू ल्याएका छन् ( ३९ प्रक्रमको टिप्पणी हेर्नुहोस् )। यस कारण ९० अंशभन्दा बढ्ता भागको ज्या (=इष्ट चापको कोटिज्या) उर्ध्वाधर हुन्छ भनी भास्करले बोलेका हुन्।

उनको लेखाइको सारांश "द्वितीय पदमा रहेको इष्ट चापको उत्क्रमज्या = त्रि+(इष्ट चाप—९०अंश) को ज्या हुन्छ" भन्ने हो। सो कुरा माथि नै सिद्ध गरिसकिएको छ।

## ५४ प्रक्रम

### इष्ट चापको कोटयुत्क्रमज्या ल्याउने रीति

पहिलो पदमा रहेको इष्ट चापको कोटयुत्क्रमज्या ल्याउने रीतिको विषयमा हामीले ४४ प्रक्रममा विचार गरेका थियौं। अब हामी सबै पदमा रहेका इष्ट चापका कोटयुत्क्रमज्या ल्याउने विषयमा विचार गरौं।




[३४ चित्र]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

"कोटित्रिज्याको मूल बिन्दुबाट पहिलो पदको अन्त्य बिन्दुसम्म रहेको याम्योत्तर व्यासको टुक्रोलाई त्यस चापको 'कोटचुत्क्रमज्या' भन्दछन्" भनी १५ प्रक्रममा लेखिएको छ । त्यसअनुसार—

प्रथम पदमा— पूच चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्रु उ
द्वितीय पदमा— पूचा चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्रा उ
तृतीय पदमा— पूचि चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्रि उ
चतुर्थ पदमा— पूची चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्री उ

हुन्छन् ।

प्रथम पद र द्वितीय पदमा ज्या धनात्मक हुन्छ तथा तृतीय पद र चतुर्थ पदमा ज्या ऋणात्मक हुन्छ भन्ने कुरा ५० प्रक्रममा सिद्ध गरिएको छ । यताबाट "त्रिज्याबाट ज्या घटाइदियो भने कोटचुत्क्रमज्या बाँकी रहन्छ ।" भन्ने १५ प्रक्रममा दिइएको नियममा केही बाधा पर्दैन । किन भने

प्रथम पदमा—
पूच चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्रु उ = के उ — के क्रु
= त्रि — ज्या

द्वितीय पदमा—
पूचा चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्रा उ = के उ — के क्रा
= त्रि — ज्या

तृतीय पदमा—
पूचि चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्रि उ = के उ + के क्रि
= त्रि + ज्या = त्रि — (— ज्या)

चतुर्थ पदमा—
पूची चापको कोटचुत्क्रमज्या = क्री उ = के उ + के क्री
= त्रि + ज्या = त्रि — (— ज्या) हुन्छन् ।

प्रथम पदमा रहेको इष्ट चापको कोटचुत्क्रमज्या ल्याउने रीति ४४ प्रक्रममा दिएकै छ ।

द्वितीय पदमा ३९ प्रक्रमको रीतअनुसार इष्ट चापको भुजबाट कोटि बनाई सो कोटिचापबाट ९ सारणी उपयोग गरी उत्क्रमज्या ल्याउनू, त्यही इष्ट कोटचुत्क्रमज्या हुन्छ ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

तृतीय र चतुर्थ पदमा इष्ट चापको भुज बनाई सो भुजचापबाट ८ सारणी उपयोग गरी ज्या ल्याउनू, सो ज्यालाई त्रिज्यामा जोडिदिनू, इष्ट कोटच्युत्क्रमज्या आउँछ ।

आद्ये द्वितीये च पदे भुजांऽश-
कोटच्युत्क्रमज्यैव भवेद् अभीष्टा ।
अन्यत्र दोर्भागगुणस् त्रिभज्या-
युतो भवेत् कोटिविलोममौर्वी ।।५४।।

[पहिलो र दोस्रो पदमा भुजांशको कोटिबाट नै कोटच्युत्क्रमज्या आउँछ । तेस्रो र चौथो पदमा भुजांशको ज्या ल्याई त्रिज्यामा जोडिदियो भने कोटच्युत्क्रमज्या आउँछ ।]

१ उदाहरण— १२३ अं १५ क को कोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ ।

यहाँ इष्ट चाप द्वितीय पदमा रहेको हुनाले

अभीष्ट कोटच्युत्क्रमज्या = इष्ट चापको भुजांशको कोटच्युत्क्रमज्या
= १२३° १५' को भुजांशको कोटच्युत्क्रमज्या
= (१८०°—१२३° १५') को कोटच्युत्क्रमज्या
= ५६° ४५' को कोटच्युत्क्रमज्या
= ५६३ [२६ प्रश्नमालाको ५ प्रश्नको उत्तरबाट]

२ उदाहरण— १९८ अं ४५ क को कोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ ।

यहाँ इष्ट चाप तृतीय पदमा रहेको हुनाले

अभीष्ट कोटच्युत्क्रमज्या = त्रि + इष्ट चापको भुजांशको ज्या
= त्रि + (१९८° ४५'—१८०°) को ज्या
= त्रि + १८° ४५' को ज्या
= ३४३८ + ११०५ [८ सारणीबाट]
= ४५४३

३ उदाहरण— ३२६ अं १५ क को कोटच्युत्क्रमज्या ल्याऊ ।

यहाँ इष्ट चाप चौथो पदमा रहेको हुनाले

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

अभीष्ट कोटयुत्क्रमज्या = त्रि + इष्ट चापको भुजांशको ज्या
= त्रि + (३६०° − ३२६° १५′) को ज्या
= त्रि + ३३° ४५′ को ज्या
= ३४३८ + १९१० [८ सारणीबाट]
= ५३४८

## ३८–प्रश्नमाला

तलका चापका कोटयुत्क्रमज्या ल्याऊ—

| | | |
|---|---|---|
| (१) १५ अं | (२) ४५ अं | (३) १०५ अं |
| (४) १३५ अं | (५) २४० अं | (६) ३१५ अं |
| (७) २१० अं | (८) २८५ अं | (९) १५० अं |
| (१०) २२५ अं | (११) १४२ अं ३० क | (१२) ३०३ अं ४५ क |
| (१३) २०२ अं ३० क | (१४) १०१ अं १५ क | (१५) २९६ अं १५ क |
| (१६) १२३ अं ४५ क | (१७) २८१ अं १५ क | (१८) ३४१ अं १५ क |
| (१९) २३६ अं १५ क | (२०) १७२ अं ३० क | |

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) २५४८ | (२) १००७ | (३) ११७ |
| (४) १००७ | (५) ६४१५ | (६) ५८६९ |
| (७) ५४५७ | (८) ६७५९ | (९) १७१९ |
| (१०) ५८६९ | (११) १३४५ | (१२) ६२९७ |
| (१३) ४७५४ | (१४) ६६ | (१५) ६५२१ |
| (१६) ५७९ | (१७) ६८१० | (१८) ४५४३ |
| (१९) ६२९७ | (२०) २९८९ | |

## ५५ प्रक्रम—

### उत्क्रमज्या तथा कोटयुत्क्रमज्याबाट इष्ट चाप ल्याउने रीति

इष्ट चाप प्रथम पदमा भए सो चापको उत्क्रमज्याबाट सो चाप ल्याउने

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

रीति ४३ प्रक्रममा दिइएको छ। यसै गरी प्रथम पदमा रहेको इष्ट चापको कोटच्युत्क्रमज्याबाट सो चाप ल्याउने रीति पनि ४५ प्रक्रममा दिइएको छ। अब हामी उत्क्रमज्या र कोटच्युत्क्रमज्या थाहा पाई जुनसुकै पदमा रहेको इष्ट चाप ल्याउने रीतिको विषयमा विचार गर्छौं।

प्रथम पदमा—

पू च चापको उत्क्रमज्या = अ पू [३४ चित्र हेर्नुहोस्]

कोटच्युत्क्रमज्या = क्ष उ

दुवै त्रिज्याभन्दा साना।

द्वितीय पदमा—

पू चा चापको उत्क्रमज्या = आ पू

कोटच्युत्क्रमज्या = क्षा उ

उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो।

तृतीय पदमा—

पू चि चापको उत्क्रमज्या = अि पू

कोटच्युत्क्रमज्या = क्षि उ

दुवै त्रिज्याभन्दा ठूला।

चतुर्थ पदमा—

पू ची चापको उत्क्रमज्या = अी पू

कोटच्युत्क्रमज्या = क्षी उ

उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो हुने स्पष्ट देखिन्छन्।

पादे पूर्वे तुरीये भवति लघुतरा व्यस्तमौर्वी त्रिमौर्व्या

द्वैतीयीके तृतीये भवति गुरुतरा व्यस्तमौर्वी त्रिमौर्व्याः।

पादे पूर्वे द्वितीये भवति लघुतरा खाऽङ्क९०भागज्यकाया

व्यस्तज्या कोटिजाता भवति गुरुतरा शेषयोः पादयोः सा॥५५॥

[पहिलो पाउमा र चौथो पाउमा उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो हुन्छ। दोस्रो र तेस्रो पाउमा उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो हुन्छ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

पहिलो र दोस्रो पाउमा कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो हुन्छ । तेस्रो र चौथो पाउमा कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो हुन्छ ।]

यताबाट उत्क्रमज्या र कोटच्युत्क्रमज्यामध्ये (जुनसुकै) एउटा थाहा पाई तथा उत्क्रमज्या र कोटच्युत्क्रमज्या दुवै त्रिज्याभन्दा ठूला साना के छन् भन्ने कुरा समेत थाहा पाएमा इष्ट भुजांश र अभीष्ट पद थाहा पाउन सकिन्छ भन्ने स्पष्ट हुन्छ । सो भुजांशबाट ५१ प्रक्रमको रीतअनुसार इष्ट चाप थाहा पाउन सकिन्छ ।

१ उदाहरण— उत्क्रमज्या = २९९, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या तथा कोटच्युत्क्रमज्या दुवै त्रिज्याभन्दा साना भएकाले इष्ट चाप प्रथम पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

२९९ उत्क्रमज्याको भुजचाप = २४° [२४ प्रश्नमालाको १ प्रश्नबाट]

यस कारण अभीष्ट चाप = २४°

२ उदाहरण— उत्क्रमज्या = ६५७७, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएकोले इष्ट चाप द्वितीय पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

द्वितीय पदमा उत्क्रमज्या = त्रि + इष्ट चापको भुजांशको कोटिज्या

यस कारण

इष्ट चापको भुजांशको कोटिज्या = उत्क्रमज्या — त्रि

= ६५७७ — ३४३८ = ३१३९

३१३९ कोटिज्याको भुजचाप = २४° [२० प्रश्नमालाको २ प्रश्नबाट]

द्वितीय पदमा भुजचाप २४° भएकोले

अभीष्ट चाप = १८०° — २४° = १५६°

३ उदाहरण— उत्क्रमज्या ६५७७, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या र कोटच्युत्क्रमज्या दुवै त्रिज्याभन्दा ठूला भएकाले अभीष्ट चाप तृतीय पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

तृतीय पदमा उत्क्रमज्या = त्रि + इष्ट चापको भुजांशको कोटिज्या

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

यस कारण

इष्ट चापको भुजांशको कोटिज्या = उत्क्रमज्या — त्रि

= ६५७७ — ३४३८ = ३१३९

३१३९ कोटिज्याको भुजचाप = २४° [२० प्रश्नमालाको २ प्रश्नबाट]

तृतीय पदमा भुजचाप = २४° भएकोले

अभीष्ट चाप = १८०° + २४° = २०४°

४ उदाहरण— उत्क्रमज्या = २९९, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो भएकोले इष्ट चाप चौथो पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

२९९ उत्क्रमज्याको भुजचाप = २४° [२४ प्रश्नमालाको १ प्रश्नबाट]

चतुर्थ पदमा भुजचाप २४° भएकोले

अभीष्ट चाप = ३६०° — २४° = ३३६°

५ उदाहरण— कोटच्युत्क्रमज्या = ४६१, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या तथा कोटच्युत्क्रमज्या दुवै त्रिज्याभन्दा साना भएकाले इष्ट चाप प्रथम पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

४६१ उत्क्रमज्याको चाप = ३०° = इष्ट कोटिचाप [९ सारणीबाट]

प्रथम पदमा कोटिचाप ३०° भएकोले

अभीष्ट चाप = ९०° — ३०° = ६०°

६ उदाहरण— कोटच्युत्क्रमज्या = ५१५७, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या र कोटच्युत्क्रमज्या दुवै त्रिज्याभन्दा ठूला भएकाले इष्ट चाप तृतीय पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

तृतीय पदमा कोटच्युत्क्रमज्या = त्रि + इष्ट चापको भुजांशको ज्या

∴ इष्ट चापको भुजांशको ज्या = कोटच्युत्क्रमज्या — त्रि

= ५१५७ — ३४३८ = १७१९

१७१९ ज्याको भुजचाप = ३०° [८ सारणीबाट]

तृतीय पदमा भुजचाप ३०° भएकोले

अभीष्ट चाप = १८०° + ३०° = २१०°

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

७ उदाहरण— कोटच्युत्क्रमज्या = १७१९, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएकोले इष्ट चाप द्वितीय पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

द्वितीय पदमा कोटच्युत्क्रमज्या = त्रिज्या — इष्ट चापको भुजांशको ज्या

∴ इष्ट चापको भुजांशको ज्या = त्रि — कोटच्युत्क्रमज्या

= ३४३८ — १७१९ = १७१९

१७१९ ज्याको भुजचाप = ३०° [८ सारणीबाट]

द्वितीय पदमा भुज चाप ३०° भएकोले

अभीष्ट चाप = १८०° — ३०° = १५०°

८ उदाहरण— कोटच्युत्क्रमज्या = ५१५७, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएमा इष्ट चाप ल्याऊ ।

यहाँ कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो भएकोले इष्ट चाप चौथो पदमा रहेछ भन्ने थाहा हुन्छ ।

चतुर्थ पदमा कोटच्युत्क्रमज्या = त्रि + इष्ट चापको भुजांशको ज्या

∴ इष्टचापको भुजांशको ज्या = कोटच्युत्क्रमज्या — त्रि

= ५१५७ — ३४३८ = १७१९

१७१९ ज्याको भुजचाप = ३०° [८ सारणीबाट]

चतुर्थ पदमा भुजचाप ३०° भएकाले

इष्ट चाप = ३६०° — ३०° = ३३०°

## ३९—प्रश्नमाला

तलका उत्क्रमज्याहरूबाट चाप ल्याऊ—

(१) उत्क्रमज्या = ८५३, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो
(२) उत्क्रमज्या = ५१५७, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो
(३) उत्क्रमज्या = ५५३१, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(४) उत्क्रमज्या = १४६७, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(५) उत्क्रमज्या = २०४०, कोटच्युत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(६) कोटचुत्क्रमज्या = १९१७, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो
(७) कोटचुत्क्रमज्या = १७१९, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(८) कोटचुत्क्रमज्या = ६१६६, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(९) कोटचुत्क्रमज्या = ५३४८, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो
(१०) कोटचुत्क्रमज्या = ४५४३, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(११) उत्क्रमज्या = १०००, कोटचुत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(१२) कोटचुत्क्रमज्या = १४१८, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(१३) कोटचुत्क्रमज्या = ४३२८, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(१४) उत्क्रमज्या = ३६०, कोटचुत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(१५) कोटचुत्क्रमज्या = ३१२, उत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा ठूलो
(१६) उत्क्रमज्या = ४१०९, कोटचुत्क्रमज्या त्रिज्याभन्दा सानो

## उत्तर

| | | |
|---|---|---|
| (१) ४१ अं १५ क | (२) १२० अं | (३) २३२ अं ३० क |
| (४) ३०५ अं | (५) ६६ अं | (६) २६ अं १५ क |
| (७) १५० अं | (८) २३२ अं ३० क | (९) ३२६ अं १५ क |
| (१०) १९८ अं ४५ क | (११) ३१५ अं १० क | (१२) १४४ अं |
| (१३) १९५ अं | (१४) ३३३ अं ३४ क | (१५) ११४ अं ३० क |
| (१६) १०१ अं १५ क | | |

## ५६ प्रक्रम—

द्वितीय पदमा रहेको चापको उत्क्रमज्या थाहा पाई इष्ट चाप ल्याउने विषयमा भास्करले बोलेको कुरो यो हो—

त्रिज्याऽधिकस्य क्रमचापयुक्ताः
खखाऽब्धिबाणा५४०० धनुरुत्क्रमात् स्यात् ॥५६॥

(सिद्धान्तशिरोमणि त्रिप्रश्नाधिकार ६८ श्लोक)

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

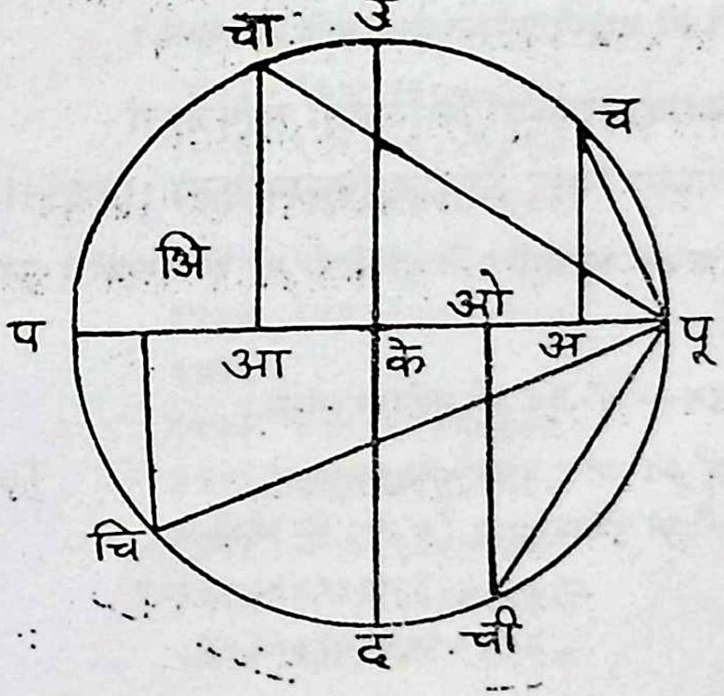
[त्रिज्याभन्दा उत्क्रमज्या धेरै छ भने सो उत्क्रमज्याबाट त्रिज्या घटाई शेषलाई ज्या (क्रमज्या) मानी चाप ल्याउनू । सो चापमा ५४०० कला (=९० अंश) जोडिदिनू, इष्ट चाप हुन्छ ।]

यसको उपपत्ति तथा उदाहरण माथि ५५ प्रक्रममा परिसकेकेको छ ।

## ५७ प्रक्रम—

### पूर्णज्याको सारणी बनाउने रीति

"चापका दुवै प्रान्तमा गई वृत्तबाहिर नजाने रेखालाई त्यस चापको 'पूर्णज्या' भन्दछन्" भनी माथि ६ प्रक्रममा लेखिएको छ । यस कुरालाई लिई अब हामी पूर्णज्याको विषयमा विचार गर्छौं ।




[३५ चित्र]

प्रथम पदमा– पू च चापको पूर्णज्या =पू च रेखा

द्वितीय पदमा– पू उ चा चापको पूर्णज्या =पू चा रेखा

तृतीय पदमा– पू उ प चि चापको पूर्णज्या =पू चि रेखा

चतुर्थ पदमा– पू उ प द ची चापको पूर्णज्या =पू ची रेखा हुन्छन् ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

पू उ प चापको (१८० अंशको) पूर्णज्या पू प व्यास हुन्छ। यताबाट १८०-अंशसम्म पूर्णज्या बढ्दै जाने र त्यसपछि घट्दै जाने स्पष्ट हुन्छ।

तृतीय पदमा रहेको पू उ प चि चापको पूर्णज्या पू चि रेखा छ। सो पू चि रेखा नै ३६०°—पू उ प चि चाप = पू द चि चापको पूर्णज्या बनेको छ। यसै गरी चतुर्थ पदमा रहेको पू उ प द ची चापको पूर्णज्या पू ची रेखा छ। सो पू ची रेखा नै ३६०°—पू उ प द ची चाप = पू ची चापको पूर्णज्या बनेको छ।

यताबाट १८० अंशसम्म पूर्णज्या बढ्दै जाने र त्यसपछि घट्न थाल्ने तथा १८१ अंश र १७९ अंशको पूर्णज्या बराबर हुने रहेछ भन्ने स्पष्ट देखिन्छ। यस कारण पूर्णज्याको सारणी बनाउँदा १८० अंशसम्मका चापको सारणी बनाउनु आवश्यक छ। माथि हामीले २२५, २२५ कला फरक पारी ज्याका सारणी दिएका छौं।

यस कारण $\frac{१८०}{२२५}$ अं = $\frac{१८०}{२२५}$ × ६० = ४८ वटा पूर्णज्या गनी सारणी बनाउनु आवश्यक हुन आयो।

इष्ट चापको पूर्णज्याको आधा त्यस चापको आधा चापको ज्या हुन्छ भनी १० प्रकममा लेखिएको छ। यताबाट इष्ट चापको आधा चापको ज्यालाई २ ले गुनिदियो भने सो चापको पूर्णज्या हुन्छ भन्ने सिद्ध हुन्छ।

हन्याद् द्वाऽभ्यां शिञ्जिनीं चापजातां
पूर्णज्या स्याद् द्विघ्नतच्चापसिद्धा ।।५६½।।

[इष्ट चापको ज्यालाई २ ले गुनिदियो भने सो चापको २ गुना चापको पूर्णज्या हुन्छ।]

उदाहरण-- ७° ३०′ को पूर्णज्या ल्याऊ।

३° ४५′ को ज्या = २२४·८५५९५८२८९३०२ [७ सारणीबाट]

∴ ७° ३०′ को पूर्णज्या = २ (३°४५′ को ज्या)

= २ × २२४·८५५९५८२८९३०२

= ४४९·७११९१६५७८६०४

## ४०—प्रश्नमाला

तलका चापका पूर्णज्या ल्याऊ--

| | | |
|---|---|---|
| (१) १५ अं | (२) २२ अं ३० क | (३) ३० अं |
| (४) ३७ अं ३० क | (५) ४५ अं | (६) ५२ अं ३० क |
| (७) ६० अं | (८) ६७ अं ३० क | (९) ७५ अं |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

(१०) ८२ अं ३० क (११) ९० अं (१२) ९७ अं ३० क
(१३) १०५ अं (१४) ११२ अं ३० क (१५) १२० अं
(१६) १२७ अं ३० क (१७) १३५ अं (१८) १४२ अं ३० क
(१९) १५० अं (२०) १५७ अं ३० क (२१) १६५ अं
(२२) १७२ अं ३० क (२३) १८० अं

## उत्तर

(१) ८९७· ४९८०९७७०४७२० (२) १३४१· ४४१०५४१८२०१६
(३) १७७९· ६३९७५४१२८२२८ (४) २२१०· २१७७६३४२३४२८
(५) २६३१· ३३१२८०९४१७४० (६) ३०४१· १७७०३३९४५८४४
(७) ३४३८ (८) ३८२०· १००९२२२४५५२०
(९) ४१८५· ८४३५८५८६५८८४ (१०) ४५३३· ६६१८२४६२७६००
(११) ४८६२· ०६६२२७४३४९२६ (१२) ५१६९· ६५०५१६२३५६०४
(१३) ५४५५· ०९७५६७८४०९१६ (१४) ५७१७· १८५०५४१९५४२८
(१५) ५९५४· ७९७०६७६४१८७८४ (१६) ६१६६· ८९६९७०७८०९०८
(१७) ६३५२· ५९५६६५५४५६३६ (१८) ६५११· ०९१५७०४०७६२०
(१९) ६६४१· ७०५९८१५६३१६४८ (२०) ६७४३· ८७९५८८०५१०२८
(२१) ६८१७· १७४८६६८०७६२४ (२२) ६८६१· २७७९५६१९१३६४
(२३) ६८७६

### ५८. प्रक्रम:-

५७ प्रक्रमको रीतअनुसार २४ वटा पूर्णज्या आए । हामीलाई ४८ वटा पूर्ण-ज्या चाहिएका छन् । बांकी २४ वटा पूर्णज्याको गणना गर्न—

$$\text{इष्ट चापको आधा चापको ज्या} = \sqrt{\frac{\text{त्रि} \times \text{उत्क्रमज्या}}{२}} \quad [\text{१८ प्रक्रम}]$$

$$\text{वा, } २ \times \text{इष्ट चापको आधाको ज्या} = २ \times \sqrt{\frac{\text{त्रि} \times \text{उत्क्रमज्या}}{२}}$$

$$= \sqrt{\frac{४ \cdot \text{त्रि} \times \text{उत्क्रमज्या}}{२}}$$

$$= \sqrt{२ \cdot \text{त्रि} \times \text{उत्क्रमज्या}}$$

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

∴ इष्ट चापको आधा चापको ज्यालाई २ ले गुनिदियो भने इष्ट चापको पूर्णज्या हुन्छ । [५७ प्रक्रम]

∴ इष्ट चापको पूर्णज्या $=\sqrt{२ \times त्रि \times उत्क्रमज्या}$

त्रिज्यानिघ्न्या व्यस्तमौर्व्या द्विरनिघ्न्या
मूलं सिद्ध्येत् पूर्णजीवाप्रमाणम् ।।५७।।

[इष्ट चापको उत्क्रमज्यालाई त्रिज्या र २ ले गुनी मूल लिनू; आएको मूल इष्ट चापको पूर्णज्या हुन्छ ।]

यहाँ पूर्णज्या ल्याउन उत्क्रमज्याको आवश्यकता पर्न भयो । माथि ४१ प्रक्रममा हामीले उत्क्रमज्या ल्याई ९ सारणी बनाएका थियौं । त्यहाँ ९० अंश-सम्मका मात्र उत्क्रमज्या ल्याइएका थिए तथा ती आसन्न पूर्णाङ्कको रूपमा दिइएका थिए । अब यहाँ सूक्ष्म गणना गर्न ४८ वटै सूक्ष्म उत्क्रमज्या ल्याई दिइन्छन् । माथि २९ प्रक्रमको ७ सारणीमा दशमलवको १२ स्थानसम्म २४ वटा सूक्ष्म ज्या दिइएका छन् । तिनबाट ३९-४० प्रक्रमका रीतअनुसार सूक्ष्म कोटिज्या ल्याउन सकिन्छ । ती कोटिज्यालाई पहिलो पाउमा (९० अंशसम्मको) उत्क्रमज्या ल्याउन ५०-५२ प्रक्रमका रीतअनुसार त्रिज्याबाट घटाउनुपर्छ तथा त्यसभन्दा माथि द्वितीय पाउमा (१८० अंशसम्मको) उत्क्रमज्या ल्याउन त्रिज्यामा जोड्नुपर्छ ।

१ उदाहरण— ७ अंश ३० कलाको उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

$७^\circ\ ३०'$ को ऊत्क्रमज्या $=$ त्रि—$७^\circ\ ३०'$ को कोटिज्या

$=$ त्रि—$(९०^\circ — ७^\circ\ ३०')$ को ज्या

$=$ त्रि—$८२^\circ\ ३०'$ को ज्या

$=$ ३४३८—३४०८·५८७४३३४०३८१२

$=$ २९·४१२५६६५९६१८८

२ उदाहरण— $१७२^\circ\ ३०'$ को उत्क्रमज्या ल्याऊ ।

यहाँ अभीष्ट चाप द्वितीय पदमा रहेको छ ।

∴ $१७२^\circ\ ३०'$ को उत्क्रमज्या

$=$ त्रि $+$ $१७२^\circ\ ३०'$ को कोटिज्या

$=$ त्रि $+$ $(१७२^\circ\ ३०' — ९०^\circ)$ को ज्या

$=$ त्रि $+$ $८२^\circ\ ३०'$ को ज्या

$=$ ३४३८ $+$ ३४०८·५८७४३३४०३८१२

$=$ ६८४६·५८७४३३४०३८१२

यही रीतबाट गणना गरी तलको सारणी बनाइएको हो ।

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# १२ सारणी (पूर्वार्ध)

त्रिज्या = ३४३८

| चाप अं । क | उत्क्रमज्या | पूर्णाङ्क |
|---|---|---|
| ३।४५ | ७· ३६१०२१९०४३१८ | ७ |
| ७।३० | २९· ४१२५६६५९६१८८ | २९ |
| ११।१५ | ६६· ०६०२०५९७४४८६ | ६६ |
| १५।०० | ११७· १४७००९२१८४१८ | ११७ |
| १८।४५ | १८२· ४५४२१४७९६१९० | १८२ |
| २२।३० | २६१· ७०२१६७२२७१८२ | २६२ |
| २६।१५ | ३५४· ५५१५१४६०९५४६ | ३५५ |
| ३०।०० | ४६०· ६०४६६१७९०६०८ | ४६१ |
| ३३।४५ | ५७९· ४०७४७२९०२२८६ | ५७९ |
| ३७।३० | ७१०· ४५१२१६०७९५४२ | ७१० |
| ४१।१५ | ८५३· १७४७४१८८७१९८ | ८५३ |
| ४५।०० | १००६· ९६६८८६२८२५३२ | १००७ |
| ४८।४५ | ११७१· १६९०८७६८६२०० | ११७१ |
| ५२।३० | १३४५· ०७८२०७०६७०५८ | १३४५ |
| ५६।१५ | १५२७· ९४९५३८८७७२४० | १५२८ |
| ६०।०० | १७१९· | १७१९ |
| ६३।४५ | १९१७· ४११४८३०२७०७८ | १९१७ |
| ६७।३० | २१२२· ३३४३५९५२९१३० | २१२२ |
| ७१।१५ | २३३२· ८९१११८२८८२८६ | २३३३ |
| ७५।०० | २५४८· १८०१२२९३५८८६ | २५४८ |
| ७८।४५ | २७६७· २७९४७२९०८९१२ | २७६७ |
| ८२।३० | २९८९· २५०९५११४७६४० | २९८९ |
| ८६।१५ | ३२१३· १४४०४१७१०६९८ | ३२१३ |
| ९०।०० | ३४३८· | ३४३८ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# १२ सारणी (उत्तरार्ध)

त्रिज्या = ३४३८

| क्षेप अं । क | उत्क्रमज्या | पूर्णाङ्क |
|---|---|---|
| ९३।४५ | ३६६२· ८५५९५८२८९३०२ | ३६६३ |
| ९७।३० | ३८८६· ७४९०४८८५२३६० | ३८८७ |
| १०१।१५ | ४१०८· ७२०५२७०९१००८ | ४१०९ |
| १०५।०० | ४३२७· ८१९८७७०६४११४ | ४३२८ |
| १०८।४५ | ४५४३· १०८८८१७११७१४ | ४५४३ |
| ११२।३० | ४७५३· ६६५६४०४७०८७० | ४७५४ |
| ११६।१५ | ४९५८· ५८८५१६८२५०८८ | ४९५९ |
| १२०।०० | ५१५७· | ५१५७ |
| १२३।४५ | ५३४८· ०५०४६११२२७६० | ५३४८ |
| १२७।३० | ५५३०· ९२१७९२९३२९४२ | ५५३१ |
| १३१।१५ | ५७०४· ८३०९१२३१३८०० | ५७०५ |
| १३५।०० | ५८६९· ०३३११३७१७४६८ | ५८६९ |
| १३८।४५ | ६०२२· ८२५२५८११२८०२ | ६०२३ |
| १४२।३० | ६१६५· ५४८७८३९२०४५८ | ६१६६ |
| १४६।१५ | ६२९६· ५९२५२७०९७७१४ | ६२९७ |
| १५०।०० | ६४१५· ३९५३३८२०९३९२ | ६४१५ |
| १५३।४५ | ६५२१· ४४८४८५३९०४५४ | ६५२१ |
| १५७।३० | ६६१४· २९७८३२७७२८१८ | ६६१४ |
| १६१।१५ | ६६९३· ५४५७८५२०३८१० | ६६९४ |
| १६५।०० | ६७५८· ८५२९९०७८१५८२ | ६७५९ |
| १६८।४५ | ६८०९· ९३९७९४०२५५१४ | ६८१० |
| १७२।३० | ६८४६· ५८७४३३४०३८१२ | ६८४७ |
| १७६।१५ | ६८६८· ६३८९७८०९५६८२ | ६८६९ |
| १८०।०० | ६८७६· | ६८७६ |

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

# परिशिष्ट

यस ग्रन्थमा ठाउँ ठाउँमा रेखागणितका प्रतिज्ञाहरूको उल्लेख भएको छ। सम्झन सजिलो होस् भनी ती प्रतिज्ञा यहाँ दिइन्छन्।

३ प्रक्रममा—

पूर्वत्र्यस्रे संस्थितं कोणयुग्मं
किञ्चिद् बाहुश् चेतरस्मिँस् त्रिकोणे।
कोणद्वन्द्वेनोषुषा बाहुना च
केनाऽपि स्याच् चेत् समानं क्रमेण॥
पूर्वत्र्यस्रे संस्थितं शिष्यमाणं
कोणो बाहुद्वन्द्वमन्यत्रिकोणे।
शेषेण स्याद् ऊषुषा कोणकेन
बाहुद्वन्द्वेनाऽपि तुल्यं क्रमेण॥
त्र्यस्रद्वन्द्वं तच् च निर्दिश्यमानम्
अन्योन्यस्य स्यात् समानं तदानीम्।

(रेखागणित १ अ. २६ प्र.)

[पहिलो त्रिभुजका कुनै दुइवटा कोण दोस्रो त्रिभुजका कुनै दुइवटा कोणसँग बराबर छन् तथा पहिलो त्रिभुजको कुनै एउटा भुज दोस्रो त्रिभुजको कुनै एउटा भुजसँग बराबर छ भने पहिलो त्रिभुजको बाँकी रहेको कोण दोस्रो त्रिभुजको बाँकी रहेको कोणसँग बराबर हुन्छ। पहिलो त्रिभुजका बाँकी रहेका दुइवटा भुज दोस्रो त्रिभुजका बाँकी रहेका दुइवटा भुजसँग बराबर हुन्छन् तथा ती दुइ त्रिभुज पनि आपसमा बराबर हुन्छन्।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

दोष्णो वर्गः कोटिवर्गेण युक्तो
जात्यत्र्यस्रे कर्णकृत्या समः स्यात् ।

(रेखागणित १ अ. ४७ प्र.)

[जात्यत्रिभुजमा भुज र कोटिको वर्गयोग कर्णको वर्गले बराबर हुन्छ ।]

८ प्रक्रममा—

प्रोक्तां रेखां त्रिज्यके रेखिकायास्
तस्याः प्रान्तौ केन्द्रबिन्दू प्रकल्प्य ।
वृत्ते कृत्वा वृत्तसम्पातबिन्द्वोर्
ऊर्ध्वं बिन्दुं कल्पयेद् इष्टबिन्दुम् ।।
केन्द्रद्वन्द्वाद् इष्टबिन्दुं च यावत्
त्रिज्याऽऽकारं सूत्रयुग्मं विदध्यात् ।
एवं तुल्यैर् दोर्भिरुत्पद्यमानं
त्र्यस्रं सिद्ध्येत् प्रोक्तरेखोपरिस्थम् ।।

(रेखागणित १ अ. १ प्र.)

[निर्दिष्ट रेखालाई त्रिज्या मानी सो रेखाका दुइ प्रान्तलाई केन्द्र मानेर दुइवटा वृत्त बनाउनू । ती दुइ वृत्तका परिधिको दुइ ठाउँमा योग हुन्छ । ती दुइ योगबिन्दुमध्ये माथिल्लोचाहिंलाई इष्ट बिन्दु भनी कल्पना गर्नू । निर्दिष्ट रेखाका दुइ प्रान्तबाट इष्ट बिन्दुसम्म जाने दुइवटा रेखा हाल्नू । ती दुवै रेखा ती दुइ वृत्तका त्रिज्या हुन्छन् । यसो गर्दा निर्दिष्ट रेखाको माथिल्लो भागमा समभुज (तीनवटै भुज बराबर भएको) त्रिभुज बन्दछ ।]

त्र्यस्रक्षेत्रे बाहवश् चेत् समाः स्युः
कोणाश् च स्युस् तुल्यताम् आददानाः ।

(रेखागणित १ अ. ५ प्र. को अनुमान)

[समभुज (तीनवटै भुज बराबर भएको) त्रिभुजमा तीनवटै कोण बराबर हुन्छन् ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

त्र्यस्रे बाहोः कस्यचिद् वर्द्धनेन
बाह्ये भागे जायमानस् तु कोणः ।
अन्तस्त्र्यस्रं तस्थुषोः कोणयोः स्याद्
युक्त्या तुल्यः स्वाऽङ्गसक्ताऽस्रवर्जम् ॥
अन्तस्त्र्यस्रं संस्थितायास् त्रिकोण्या
योगोऽस्राभ्यां स्यात् समाभ्यां समानः ।

(रेखागणित १ अ. ३२ प्र.)

[त्रिभुजको कुनै एउटा भुज बढाउनाले त्रिभुजबाहिर उत्पन्न भएको कोण, आफूसँग रहेको कोणबाहेकका त्रिभुजभित्र रहेका दुइवटा कोणको योगले बराबर हुन्छ । त्रिभुजमा रहेका तीनवटा कोणको योग दुइ समकोणले बराबर हुन्छ ।]

वृत्ते परीणाहषडंशजाता
पूर्णज्यका व्यासदलेन तुल्या ।

(रेखागणित ४ अ. १५ प्र. को अनुमान)

[वृत्तको परिधिको ६ खण्डको एक खण्ड (६० अंश) को पूर्णज्या त्रिज्याले बराबर हुन्छ ।]

१० प्रक्रममा—

आद्यत्र्यस्रे संस्थितं बाहुयुग्मं
तन्मध्यस्थः कोणकश् च क्रमेण ।
अन्यत्र्यस्रस्थेन बाहुद्वयेन
कोणेनैतद्दोर्द्वयोर्मध्यगेन ॥
तुल्यं चेत् स्यात् त्र्यस्रयुग्मस्य तस्य
भूमिर् भूम्या भूमिलग्नौ च कोणौ ।
भूमिस्थाभ्यां कोणकाभ्यां क्रमेण
तुल्यौ स्यातां ते त्रिकोणे च तुल्ये ॥

(रेखागणित १ अ. ४ प्र.)

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

[पहिलो त्रिभुजका दुइवटा भुज र ती भुजको बीचमा रहेको कोण, दोस्रो त्रिभुजका दुइवटा भुज र ती भुजको बीचमा रहेको कोणसँग क्रमैले बराबर छन् भने ती दुइ त्रिभुजका आधार आपसमा बराबर हुन्छन् । पहिलो त्रिभुजको आधारमा लागेका दुइवटा कोण दोस्रो त्रिभुजको आधारमा लागेका दुइवटा कोणसँग क्रमैले बराबर हुन्छन् तथा ती दुइ त्रिभुज पनि आपसमा बराबर हुन्छन् ।]

१२ प्रक्रममा—

युग्मं युग्मं बाहुजं सम्मुखीनं
वेदास्रे चेत् स्यात् समानान्तरस्थम् ।
बाहुद्वन्द्वे सम्मुखीने समाने
स्यातां क्षेत्रं तच्श्रुती अर्धयेताम् ।।
कोणद्वन्द्वे एककर्णाऽभिषक्ते
स्यातां तुल्ये सम्मुखीने च तत्र ।

(रेखागणित १ अ. ३४ प्र.)

[जुन चतुर्भुजमा सामुन्ने सामुन्ने रहेका दुइ दुइ भुज समानान्तर हुन्छन् त्यसमा (समानान्तर चतुर्भुजमा) सामुन्ने सामुन्ने रहेका दुइ दुइ भुज बराबर हुन्छन् । समानान्तर चतुर्भुजका कर्णले समानान्तर चतुर्भुजलाई बराबर दुइ टुक्रा पार्छन् तथा एउटै कर्णमा लागेका सामुन्ने सामुन्नेका कोण बराबर हुन्छन् ।]

२२ प्रक्रममा—

त्यस्रे बाहू चेद् भवेतां समानौ
कोणौ तुल्यौ भूमिलग्नौ भवेताम् ।
आधाराऽधो वर्धनाद् दोर्युगस्य
जातौ कोणौ भूम्यधःस्थौ च तुल्यौ ।।

( रेखागणित १ अ. ५ प्र. )

[समद्विबाहु (दुइवटा भुज बराबर भएको) त्रिभुजमा आधारमा रहेका दुवै कोण आपसमा बराबर हुन्छन् । दुवै भुजलाई आधारभन्दा तलतिर बढाउँदा आधारको तल्लो भागमा बनेका दुइवटा कोण पनि आपसमा बराबर हुन्छन् ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

आद्ये त्र्यस्रे वर्तमाना त्रिकोणी
त्र्यस्रेऽन्यस्मिन् संवसन्त्या त्रिकोण्या ।
तुल्या स्याच् चेत् त्र्यस्रयुग्मस्य तस्य
तुल्यं तुल्यं कोणमुत्पादयित्रोः ।।
बाह्वोर् बाह्वोर् एकरूपो गुणः स्यात्
तस्माद् दोष्णाम् अत्र सिद्धोऽनुपातः ।

( रेखागणित ६ अ. ४ प्र. )

[पहिलो त्रिभुजका तीनवटै कोण दोस्रो त्रिभुजका तीनवटै कोणसँग क्रमैले बराबर छन् भने बराबरका कोणलाई बनाउने दुइवटा दुइवटा भुजको निष्पत्ति एउटै हुन्छ । यस कारण यी दुइ त्रिभुजका भुजहरूमा अनुपात लाग्छ ।]

केन्द्रोत्पन्नाः केन्द्रजैर् वा वृतिस्थाः
पालीभाग्भिः कोणकाः कोणकैश् च ।
सम्पद्येरंस् तुल्यवृत्तेषु तुल्याश्
चापाः स्युस् तत्कोणभाजः समानाः ।।

( रेखागणित ३ अ. २५ प्र. )

[बराबरका वृत्तमा एउटा वृत्तको केन्द्रमा उत्पन्न भएको कोण अर्को वृत्तको केन्द्रमा उत्पन्न भएको कोणसँग बराबर छ भने अथवा एउटाको परिधिमा उत्पन्न भएको कोण अर्कोको परिधिमा उत्पन्न भएको कोणसँग बराबर छ भने ती वृत्तका ती कोणलाई उत्पन्न गराउने चाप आपसमा बराबर हुन्छन् ।]

सम्पद्येरन् कार्मुकाणां समानां
तुल्याः पूर्णज्याः सदृङ्मण्डलेषु ।

( रेखागणित ३ अ. २८ प्र. )

[बराबर वृत्तमा बराबर चापका पूर्णज्या बराबर हुन्छन् ।]

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu

CC-0. Nepal Sanskrit Academy, Kathmandu